

6. FOLGE, 1953, BAND 11,

HEFT 47
OF MICHIGAN

APR 22 1953

PHYSICS
LIBRARY

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 446. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Göttingen

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 16. Januar 1953

Inhalt

| | Seite |
|--|-------|
| F. Eckart, Berlin-Buch: Zur Entwicklung von Sekundär-Elektronen-Vervielfachern. (Mit 22 Abbildungen) | 181 |
| J. Euler, Braunschweig: Der Graphitbogen als spektralphotometrisches Strahl-dichtenormal im Gebiet von 0,25 bis 1,8 μ . (Mit 18 Abbildungen) | 203 |
| P. Kunze und G. Schulz, Rostock: Niederspannungszählrohre. (Mit 14 Ab-bildungen) | 225 |
| H. Pfister, Tübingen: Elektroneninterferenzen an Bleijodid bei Durchstrahlung im konvergenten Bündel. (Mit 37 Abbildungen) | 239 |
| H. G. Reik, Karlsruhe: Zur Theorie irreversibler Vorgänge. I | 270 |
| K. F. Novobatzky, Budapest: Zur Schrödinger-Gordon-Gleichung | 285 |
| L. Jánossy, Budapest: Über die physikalische Interpretation der Lorentz-Transformation. (Mit 4 Abbildungen) | 293 |
| L. Jánossy, Budapest: Die physikalische Problematik des Teilchen-Wellen-Problems der Quantenmechanik. (Mit 5 Abbildungen) | 323 |
| W. M. Buttler, Berlin-Buch: Über das Randschichtrauschen in Halbleitern. (Mit 1 Abbildung) | 362 |
| W. M. Buttler, Berlin-Buch: Über das Randschichtrauschen von CdS-Ein-kristallen. (Mit 6 Abbildungen) | 368 |
| H. O. Kneser und K. Voelz, Stuttgart: Zur Deutung der inneren Dämpfung fester Körper durch Schub- und Druckviskosität. (Mit 4 Abbildungen) .. | 377 |
| H. Pohlack, Jena: Beitrag zur Theorie optischer Interferenzschichtsysteme mit vorgegebenen Spektraleigenschaften. (Mit 4 Abbildungen) | 383 |
| H. Falkenhagen und G. Kelbg, Rostock: Die Spannungsabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit starker nicht assozierender Elektrolyte unter Berücksichtigung des Raumbedarfs der Ionen. (Mit 3 Abbildungen) | 389 |

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Möglich, (1) Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, oder an Herrn Prof. Dr. H. Kopfermann, Göttingen, Baurat-Gerber-Straße 12, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittel-bar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren. Einzelpreis dieses Heftes DM 5.20 (U. S. \$ 1.25).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

Seite

181

203

225

239

270

285

293

323

362

368

377

383

389

rher
des
ung,
der-
füge

len-
12,

ek-
ind

er-
ist.
en.
el-
gl.

des



Am 23. Dezember 1952 verschied im 88. Lebensjahr der
Inhaber der Verlagsbuchhandlung Johann Ambrosius Barth

Herr Hofrat Dr. phil. h. c., Dr. med. h. c.

ARTHUR MEINER

Durch sein verlegerisches Werk hat er die Entwicklung der
Wissenschaft, insbesondere der Medizin und der Natur-
wissenschaften, unterstützt. Seit 1890 betreute er unsere
Zeitschrift. Seine Persönlichkeit wie seine Leistung werden
unvergessen bleiben.

*REDAKTION UND VERLAG
DER ANNALEN DER PHYSIK*

6

2

h
R
S
R
d
se

B
ro
u

K
ge
li
q
S
In

h
en
m
de
er
—

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 11, HEFT 4-7 * 1953

Zur Entwicklung von Sekundär-Elektronen-Vervielfachern

Von F. Eckart

(Mit 22 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Eigenschaften von SEV wurden besprochen und die Nachteile der bisherigen technischen Ausführungen kritisch behandelt. Es zeigt sich, daß man die Eigenschaften von Netzvervielfachern mit Sekundär-Emissions-Schichten aus Silber, Cäsium-Oxyd-Silber wesentlich verbessern kann, wenn man die einzelnen Kathoden hochisoliert ausführt. Für die Anwendung im Fernsehbetrieb und in der Kernforschung werden Vervielfacher mit elektronenoptischer Abbildung vorgeschlagen.

Verstärkung durch Sekundär-Elektronen-Emission

Die Sekundär-Elektronen-Vervielfacher (SEV) gewinnen immer mehr an Bedeutung als unmittelbare Nachweisgeräte für ultraviolette, sichtbare und ultrarote Strahlung, sowie als mittelbare Meßgeräte zum Nachweis von Korpuskular- und γ -Strahlen.

SEV finden daher in steigendem Maße Anwendung in der Photometrie, in Kolorimetern, in Trübungs-, Reflexions-, Beugungs- und Durchlässigkeits-Meßgeräten, in der Astronomie zur Sternphotometrie, zum Auswerten von Spektrallinien-Aufnahmen, in der Entwicklung von Leuchtstoffen, als weitgehend frequenzunabhängiges Lichtsteuerorgan in der Tonfilm- und Fernsehtechnik und als Szintillationszähler in der Kernforschung. Darüber hinaus ist der SEV auch als Impulserzeuger für die Physico-Therapie vorgeschlagen worden¹⁾.

Die Sekundär-Elektronen-Emission wurde erstmals von Austin und Starke²⁻⁴⁾ beobachtet und von Lenard und seinen Schülern⁵⁻⁷⁾ weiter untersucht. Die erste technische Nutzanwendung der Sekundär-Emission wurde von Hull⁸⁻¹⁰⁾ mit dem Dynatron vorgeschlagen. Das Dynatron ist ein einfacher Oszillator, dessen negative Charakteristik durch die Sekundär-Elektronen-Emission aufrecht erhalten wird. Während bei Hull die Primärelektronen durch eine Glühkathode

¹⁾ G. Maurer, Das Elektron 3, Heft 5, 175-182.

²⁾ Austin u. Starke, Ann. Physik 9, 271 (1902).

³⁾ Austin u. Starke, Verh. dtsch. physik. Ges. 4, 106 (1902).

⁴⁾ H. Starke, Wiedemann Ann. 66, 49 (1898).

⁵⁾ H. Starke, Ann. Physik 3, 75 (1900).

⁶⁾ P. Lenard, Ann. Physik 12, 447 (1903).

⁷⁾ P. Lenard, Ann. Physik 15, 485 (1904).

⁸⁾ A. W. Hull, Proc. Inst. Radio Engrs. 6, 5-35 (1918).

⁹⁾ A. W. Hull, Jb. drahtl. Telegr. u. Teleph. 14, 217-268 (1919) u. 157-171.

¹⁰⁾ A. W. Hull, Physic. Rev. 7, 141 (1916).

erzeugt werden, hat Suhrmann¹¹⁾ bereits 1919 als Anwendung die Verstärkung von lichtelektrisch ausgelösten Elektronen vorgeschlagen. Erst 1934 gelang es Farnsworth¹²⁾ die erste brauchbare Verstärkeranordnung zu entwickeln. Mit der Entwicklung des Fernsehens wurden auch die Vervielfacher weiter verbessert¹³⁻¹⁶⁾.

1. Sekundär-Emission von Metallen

Die SE-Ausbeute δ (= Zahl der sekundär emittierten Zahl der Primärelektronen) ist offenbar bei reinen Metallen geringer als bei Halbleitern.

Bei reinen und sorgfältig entgasten Metalloberflächen ist δ etwa gleich Eins, wobei Metalle hoher Dichte (z. B. Platin) höhere Ausbeuten zeigen ($\delta_{Pt} = 1,8$ bei $V_p = 700$ V)¹⁷⁾. Bei sehr kleinen Primärenergien (< 20 eV) konnte festgestellt werden, daß δ bei Metallen kleiner Austrittsarbeit größer ist, als bei solchen großer Austrittsarbeit. Bei Alkali- und Erdalkalimetallen ist δ in der Regel $< 1^{18-22)}$. Davon abweichende Ergebnisse sind offenbar auf nicht völlig einwandfrei gereinigtes Ausgangsmaterial und auf nicht genügende Entgasung oder auf zusätzliche Adsorptions-Schichten und vor allem bei leicht oxydierbaren Metallen

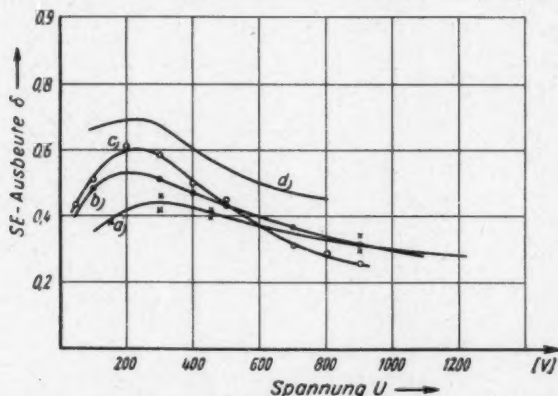


Abb. 1. Sekundärelektronen-Emission von Beryllium
Kurve a) Sekundäremissionsvermögen δ nach Messungen von Kollath, Ann. Physik 33, 285 (1938). — Kurve b) Sekundäremissionsvermögen δ nach Messungen von Bruining u. de Boer, Physica 5, 17 (1938) — Kurve c) Sekundäremissionsvermögen δ nach Messungen von Suhrmann u. Kundt, Z. Physik 120, 363 (1943) — Kurve d) Sekundäremissionsvermögen δ nach Messungen von Schneider, Physic. Rev. 54, 185 (1938).

¹¹⁾ Suhrmann, D.R.P. a. 84767, 1929.

¹²⁾ Farnsworth, J. Franklin Inst. 218, 411 (1934).

¹³⁾ Penning u. Kruithof, Physica 2, 793 (1935).

¹⁴⁾ Zworykin, Morton u. Malter, Proc. Inst. Radio Engrs. 24, 351—375 (1936).

¹⁵⁾ G. Weiss, Z. techn. Physik 17, 623 (1936).

¹⁶⁾ G. Weiss, Fernsehen und Tonfilm 7, 41 (1936).

¹⁷⁾ H. Starke, Ann. Physik 3, 75 (1900).

¹⁸⁾ R. Kollath, Ann. Physik 33, 285 (1938).

¹⁹⁾ H. Bruining u. J. H. de Boer, Physica 5, 17 (1938).

²⁰⁾ A. Afansjew u. P. W. Timofeew, Z. techn. Physik USSR 4, 953—960 (1937).

²¹⁾ R. Suhrmann u. W. Berger, Z. Physik 123, 73 (1944).

²²⁾ H. Mahl, J. d. AEG-Forschung 6, 32 (1939).

auf Oberflächen-Oxydschichten zurückzuführen. So zeigen beispielsweise Messungen an kompakten und an aufgedampften dünnen Berylliumschichten¹⁸⁾ 23–23) (Abb. 1), daß nur jene Ergebnisse dem reinen Beryllium zuzuordnen sind, bei denen $\delta < 1$ gemessen wird. Die Ausbeutekurve der reinen Be-Metallschicht hat danach einen maximalen Ausbeutefaktor von 0,7. Das Maximum liegt bei etwa 200 [V]. Infolge der geringen Streuung der Primärelektronen im Metall fällt die Ausbeute mit steigender Primärgeschwindigkeit schnell ab.

Zweifelloos besteht ein Zusammenhang von δ mit dem Einfallswinkel der Primärstrahlung. Ein verschiedentlich vermuteter Zusammenhang mit der Kristallstruktur bedarf noch weiterer Untersuchungen. Bei Metallen ist ferner die Ausbeute weitgehend von der Temperatur unabhängig²⁴⁾. Theoretisch ist dieses Ergebnis

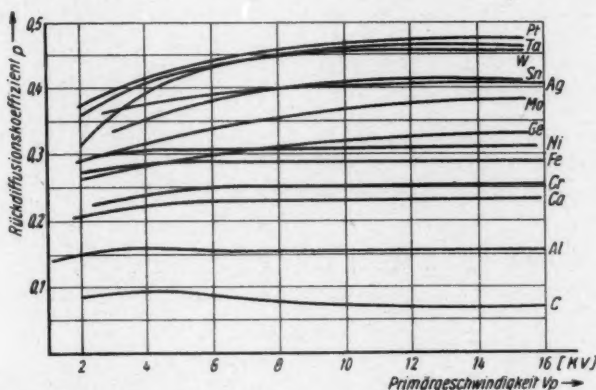


Abb. 2. Der Prozentsatz p der rückdiffundierten Elektronen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des primären Elektronenstrahls

zu erwarten²⁵⁾, da die Primär-Elektronen mit den freien Leitungselektronen in Wechselwirkung treten. Die Sekundärelektronen sind somit bei Metallen einer starken Absorption unterworfen, die zum Austritt befähigten Elektronen stammen daher aus einer nur wenige 100 Å dicken Schicht entsprechend einer Dicke von etwa 50–100 Netzebenen, in Übereinstimmung mit Beweglichkeits-Messungen von Leitungselektronen.

²³⁾ P. L. Copeland, Physic. Rev. **46**, 167 (1934).

²⁴⁾ R. Kollath, Ann. Physik **33**, 285 (1938).

²⁵⁾ H. Bruining u. J. H. de Boer, Physica **4**, 473 (1937).

²⁶⁾ H. Bruining u. J. H. de Boer, Physica **5**, 17 (1938).

²⁷⁾ R. Kollath, Naturwiss. **4**, 60 (1938).

²⁸⁾ R. Kollath, Fernsehen und Tonfilm **1**, 4 (1938).

²⁹⁾ R. Suhrmann u. W. Kundt, Z. Physik **120**, 383 (1943).

³⁰⁾ E. G. Schneider, Physic. Rev. **54**, 185 (1938).

³¹⁾ R. Warnecke u. M. Lrtie, C. R. Acad. CSci. Paris **108**, 429 (1939).

³²⁾ R. Warnecke u. a., Bull. Soc. franç. Phys. **412**, 8 (1938).

³³⁾ P. Görlich, Physik. Z. **42**, 129 (1941).

³⁴⁾ R. Kollath, Physik. Z. **39**, 201–224 (1937).

³⁵⁾ O. Hachenberg, Ann. Physik **2**, 404–416 (1948).

Die Elektronen-Rückdiffusion p verschiedener Metalle ist gleichfalls, wenn auch in weit geringerem Maße, von der Primärgeschwindigkeit abhängig (Abb. 2). Die sehr geringe Rückdiffusion von kolloidalem Graphit (C) erklärt ihre häufige Verwendung in Röhren und an Stellen, an denen der Einfluß von Primär- und Sekundär-Elektronen gering gehalten werden soll.

2. Sekundär-Emission von Isolatoren, Halbleitern und intermetallischen Verbindungen

Isolatoren, Halbleiter und offenbar auch eine bestimmte Gruppe von intermetallischen Verbindungen zeigen dagegen ein wesentlich höheres Sekundär-Emissions-Vermögen. Untersuchungen an Isolatoren zeigten, daß, wie zu vermuten, die Absorption der Primärelektronen im (ungestörten) Grundgitter erfolgt. Die Energie-Abgabe der angeregten Elektronen erfolgt dann entweder als Gitterschwingungsquant oder an Gitter-Fehlstellen. Die SE-Ausbeute wird infolge der stärkeren Wechselwirkung mit dem Gitter temperaturabhängig³⁶⁾ 36).

In der Tabelle 1 sind die Sekundär-Emissions-Ausbeuten für reine Isolatoren, in der Tabelle 2 für Cs_2O -Schichten, die auf verschiedenen Metallen aufgebracht wurden, zusammengestellt. Danach ergibt die Ag-Unterlage für Cs_2O -Schichten die höchsten Ausbeuten.

Die Ausbeute sogenannter intermetallischer Verbindungen ist nach neueren Ergebnissen in den Tabellen 3 und 4 aufgeführt.

Tabelle 1
Das Sekundär-Emissionsvermögen von Isolatoren

| Verbindung | Herstellung | δ_{max} | Verbindung | Herstellung | δ_{max} |
|--------------------------------|--|------------------------|------------|---|----------------|
| MgO | überdampft von einer einer Pt-Spirale | 3,95 ³⁷⁾ | CsCl | | 5,8 |
| BaO | oxydiertes Ba | 4,8 ³⁸⁾ | NaBr | | 6,25 |
| Al ₂ O ₃ | oxydiertes Al | 2,3 ³⁸⁾ 39) | NaJ | | 5,5 |
| LiF | | 5,6 | KJ | | 5,6 |
| NaF | | 5,7 | CaO | | 5,0 |
| CaF ₂ | | 3,15 | Glimmer | frisch gespalten | 2,5 |
| BaF ₂ | | 4,5 | Quarzglas | mit HF gereinigt und nach Erhitzen auf 1200° | 2,9 |
| NaCl | im Hochvakuum | 6,8 | Hartglas | frisch geblasen | 2,3 |
| KCl | v. einem W-Draht über- gedampfte Schicht ⁴⁰⁾ | 7,5 | Weichglas | frisch geblasen und mit HF gereinigt | 3,1 |
| RbCl | | 5,8 | | | |

Tabelle 2
Höchstausbeuten von Cs_2O -Schichten auf verschiedenen Unterlage-Metallen

| Trägermetall | max | Trägermetall | max |
|--------------|---------|--------------|----------|
| Mg | 6,8—7,5 | Mo | 2,5—3,1 |
| Al | 4,4—4,7 | Ag | 8,0—11,0 |
| Fe | 2,7—2,9 | Ta | 4,1—5,5 |
| Ni | 4,6—5,2 | W | 3,8—3,9 |
| Cu | 3,5—4,0 | Au | 2,3 |
| Zn | 4,5—5,4 | Pb | 2,3—3,3 |

³⁶⁾ M. Knoll, O. Hachenberg u. J. Randmer, Physik. Z. **122**, 137 (1944).

³⁷⁾ Bruining, Diss. Leiden 1938.

³⁸⁾ Bruining, de Boer, Physica **5**, 17 (1938).

³⁹⁾ R. Warnecke, J. Franklin Inst. **215**, 593 (1933).

⁴⁰⁾ Bruining, de Boer, Physica **6**, 834 (1939).

Tabelle 3
Sekundär-Elektronen-Emission verschiedener Schichten

| Literatur | SEV-Schichten | Ausbeute bei | | | |
|---|--------------------------------------|---------------------|----------|-----------|-------|
| | | 100 V | 200 V | 300 V | 500 V |
| ⁴⁴⁾ ⁴⁵⁾ | (Ag)—Cs ₂ O, SCs | 1,5—2 5 | 3—4 8 | 4—5 10 | 6—7 |
| ⁴⁴⁾ | Cs—Sb | 50 V 5 100 V 6,5 | 8 | 9 | |
| ⁴¹⁾ ¹⁸⁾ ⁵⁰⁾ | (Cu + 2% Be) | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| ⁴¹⁾ ⁴⁷⁾ ⁴⁶⁾ ⁴⁷⁾ | (Cu + 2% Be)—Cs | 4 | 5,5 | 7 | 8 |
| ⁴²⁾ ⁴⁷⁾ | (Ni + 2% Be)—O | 1—2,5 | 4,5 | 5,5 | 6 |
| ⁴³⁾ | Cu—S—Cs | 3—3,5 b. 50V | | | |
| ⁴⁴⁾ ⁴⁶⁾ ⁴⁹⁾ ⁵¹⁾ | Mg—Ag | 5 | 6 | | 9 |
| ⁵²⁾ | Aktiv. bei 450° u. $7 \cdot 10^{-5}$ | | | | 14—16 |
| ⁴⁴⁾ | BeO | 3 | 3 | 3 | |
| ⁴¹⁾ | (Ag + 5% Mg)—Cs | 2 | 5 | 7 | 10 |
| ⁴¹⁾ | (Ag + 2% Be) | 1,5 | 3 | 3,5 | 4 |

Von Salow wird betont, daß bei Schichten mit hoher SE-Ausbeute auch jeweils ein negativer Temperatur-Koeffizient der Leitfähigkeit gemessen wird. Die Schichten zeigen nach der Formierung und einer geeigneten Sauerstoff- oder Wärmebehandlung nicht mehr die ursprünglichen metallischen, sondern typisch halb-leitenden Eigenschaften. Es kommt daher offenbar auf ein optimales Verhältnis des Metalloxyds zum freien Metall an.

Den größten Aufwand an experimenteller und manueller Erfahrung erfordern zweifellos die (Ag)Cs₂O, Cs-Schichten, die ganz ähnlich hergestellt werden, wie die entsprechenden Photoschichten und ganz ähnlich aufgebaut sind wie die soeben besprochenen „Legierungs-Schichten“. Während offenbar Cs-Überschuß für die Photoemission entscheidend ist, wird das Maximum der SE-Ausbeute bei wesentlich geringem Cs-Überschuß erreicht. Sind die Schichten durchformiert, so nehmen sie in der Regel begierig Sauerstoff auf und gewinnen dadurch an Empfindlichkeit.

Die Behandlung der intermetallischen Aufdampfschichten ist bereits aus Tabelle 4 im wesentlichen zu ersehen. Relativ am einfachsten ist die Behandlung der in Tabelle 3 aufgeführten (Cu—Be)- und (Ni—Be)-Legierungen. Die vorher im Vakuum bei Temperaturen um 650° C ausgewalzten Bleche werden bei etwa 0,2 mm Druck oxydiert, und zwar die Cu—Be-Schicht 1 Stunde bei 500° C und die Ni—Be-

⁴¹⁾ N. Schaetti, *Helv. phys. Acta* **23**, 108—120 (1950).

⁴²⁾ G. Gille, *Z. techn. Physik* **22**, 228—232 (1941).

⁴³⁾ S. M. Feinstein, *Z. techn. Physik (russ.)* **18**, 39 (1948).

⁴⁴⁾ A. Morton, *RCA-Review* **12**, (1949).

⁴⁵⁾ Eigene Messungen.

⁴⁶⁾ H. Salow, *Ann. Physik* **5**, 417—428 (1950).

⁴⁷⁾ I. Matthes, *Z. techn. Physik* **21**, 232 (1941).

⁴⁸⁾ I. Friedheim u. I. G. Weiss, *Naturwiss.* **29**, 777 (1941).

⁴⁹⁾ J. S. Allen, *Physic. Rev.* **61**, 692 (1942).

⁵⁰⁾ J. S. Allen, *Rev. sci. Instrum.* **18**, 739—749 (1947).

⁵¹⁾ V. K. Zworykin, J. E. Ruedy u. E. W. Pike, *J. appl. Phys.* **12**, 696—698 (1941).

⁵²⁾ Z. Bay, *Z. Physik* **117**, 221 (1941).

Tabelle 4
 SE-Ausbeute von Aufdampfschichten nach Salow⁴⁶⁾

| Konzentration in Gewichts-% | | Wert bei 500 Volt | Formierungs- Temp. °C | Dauer |
|-----------------------------|------------|----------------------|--------------------------|-------|
| Ag | | | | |
| Mg | 5% Mg | 9,5 (6) | 570—620 | 30' |
| | 15% Mg | 8,5 (4) | 570—620 | 40' |
| | 5% Mg Leg. | 9,2 (12) | 570 | 30' |
| Al | 2,2% Al | 5,1 (3) | 600—680 | 70' |
| | 1,4% Al | 3,8 (3) | 620—670 | 50' |
| Be | 5% Be | 4,9 (4) | 720 | 60' |
| | 15% Be | 7,8 (4) | 650 | 50' |
| Ca | 1,3% Ca | 4,9 (4) | 700—750 | 30' |
| Ba | 5% Ba | 2,0 (4) | 550—780 | 90' |
| Cu | | | | |
| Mg | 5% Mg | 12,2 (4) | 550—620 | 35' |
| | 10% Mg | 9,4 (10) | 570 | 30' |
| | 15% Mg | 9,1 (4) | 570—620 | 30' |
| Al | 15% Al | 7,6 (4) | 600 | 40' |
| | 5% Al | 9,6 (4) | 620 | 30' |
| Be | 2,3% Be | 5,7 (4) | 720—770 | 60' |
| | 5% Be | 6,2 (4) | 650—700 | 40' |
| | 2% Be Leg. | 5,2 (10) | 650—700 | 40' |

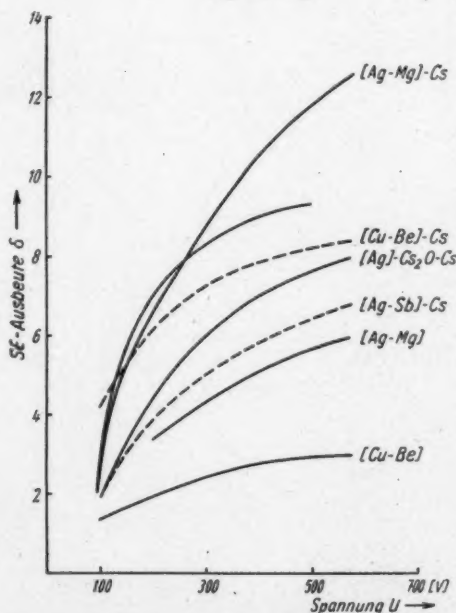


Abb. 3. SE-Ausbeute verschiedener Metall-Cs-Schichten

Die Tabelle enthält in der ersten Spalte die jeweils zu Ag oder Cu hinzugefügte Menge Erdalkalimetall in Gewichtsprozenten; in der zweiten Spalte den Mittelwert der SE-Faktoren bei $V_p = 500$ V aus einer Anzahl von Formierungsprozessen, die in Klammern dahintergesetzt ist; in den letzten Spalten die ungefähre Formierungstemperatur in °C und Formierungsdauer in Minuten.

Schicht 2 Stunden bei 600 bis 700°C und damit in ihrer Sekundär-Emissions-Ausbeute weiter verbessert. Abschließend werden die Schichten mit Cäsium bzw. Sauerstoff behandelt und so auf optimale Ausbeutewerte gebracht.

In der Abb. 3 sind die Ausbeutefaktoren verschiedener für die heutigen technischen Vervielfacher wichtigen „Metall-Cs-Schichten“ in Abhängigkeit von der Pri-

märenergie aufgezeichnet. Allerdings muß bei der Beurteilung der technischen „Vervielfacher“ betont werden, daß zur Auswahl geeigneter Schichten nicht allein die SE-Ausbeute, sondern auch andere später noch zu besprechende Eigenschaften der Schichten entscheidend sind und daß es nicht möglich ist, zehn und mehr Halbleiter-Elektroden in technische Vervielfacher einzubauen, die jene in den Tabellen und Kurven jeweils angegebenen „Maximal-Ausbeuten“ auch tatsächlich erreichen.

Die bisherigen Meßergebnisse bezogen sich überwiegend nur auf Beschleunigungsspannungen < 10 kV. Messungen der Sekundär-Emission bei höheren Anregungsspannungen sind nur wenig durchgeführt. Diese Messungen sind insofern schwieriger, als dabei eine größere Zahl von elastisch reflektierten Elektronen auftreten. Im allgemeinen wird ein weiteres Absinken des Sekundär-Emissionsfaktors bis 350 kV beobachtet⁵³⁾ 54).

Der Ausbeute-Faktor bei Bestrahlung mit positiven Ionen und neutralen Atomen wird ebenfalls untersucht und zwar bei Beschuß von gut entgastem Nickel durch H_2^+ , D_2^+ , He^+ und Ar^+ ⁵⁵⁾. Beobachtet wird in jedem Fall ein lineares Ansteigen der Ausbeute mit der Energie der auftreffenden Ionen⁵⁶⁻⁵⁸⁾.

3. Photokathoden für SEV

Zur eigentlichen Umwandlung der Strahlungs-Energie in Elektronen-Energie dienen die Photokathoden. Für SEV werden in der Regel nur die sogenannten zusammengesetzten und die Legierungs-Kathoden als dünne Durchsicht- oder kompakte Aufsichtskathoden verwendet.

Die spektrale Verteilung der Empfindlichkeit von Alkali-Kathoden mit Oxyd-Zwischenschicht ist aus Abb. 4 zu entnehmen. Abb. 5 vermittelt einen Eindruck, inwieweit die Absolut-Ausbeute und die spektrale Verteilung der Lichtempfindlichkeit von Schichten unterschiedlich sind, die alle nach den gleichen Verfahrens-Vorschriften hergestellt sind. Das Maximum bei $0,8 \mu$ wird bei allen Schichten einheitlich gemessen, während der (im logarithmischen Maßstab dargestellte) UR-Abfall verschieden steil verläuft (Grenze variiert von $1,15-1,45 \mu$), offenbar eine Folge der je nach Konzentration mehr oder weniger verbreiterten Störniveaus. Die Stromempfindlichkeit E beträgt bei den meist verwendeten Durchsicht-Kathoden etwa $15-50 \mu A/lm$.

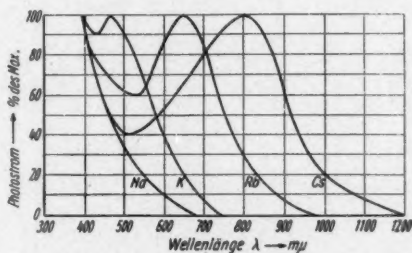


Abb. 4. Spektrale Empfindlichkeitsverteilung von Alkalikathoden mit Oxyd-Zwischenschicht nach Kluge

⁵³⁾ K. H. Stehberger, Ann. Physik 86, 825-863 (1928).

⁵⁴⁾ J. G. Trump u. R. J. van de Graaff, Physic. Rev. 75, 44-45 (1949).

⁵⁵⁾ M. Healea u. C. Houtermans, Physic. Rev. 58, 608-610 (1940).

⁵⁶⁾ J. S. Allen, Physic. Rev. 55, 336-339 (1939).

⁵⁷⁾ A. G. Hill, W. W. Buechner, J. S. Clark u. J. B. Fisk, Physic. Rev. 55, 463 bis 470 (1939).

⁵⁸⁾ H. W. Berry, Physic. Rev. 74, 848 (1948); Sekundär-Emission mit neutralen Molekülen und durch Neutralisation von positiven Ionen.

Weitere Untersuchungen⁵⁹⁾ haben ergeben, daß eine Reihe von untersuchten Metallen (Ag, Be, Al, Mn, Ce, Pb, Li) weder als Träger noch als eingebautes Fremdmetall das Silber in seinen Eigenschaften zu übertreffen vermag.

Von den Legierungs-Kathoden, die intermetallische Verbindungen von Antimon mit den Alkalimetallen darstellen, und nach Salow offenbar halbleitenden Charakter haben, zeigt die CsSb-Kathode mit einem spektralen Maximum der Licht-

empfindlichkeit bei $0,45 \mu$ die weitest aus größte Stromempfindlichkeit E ($E = 20-100 \mu A/lm$). Da die langwellige Grenze schon bei $0,70 \mu$ erreicht ist (Abb. 6), ist auch die thermische Emission gegenüber der UR-empfindlichen (Ag) Cs_2O , Ag-Cs-Kathoden um etwa drei Größenordnungen kleiner.

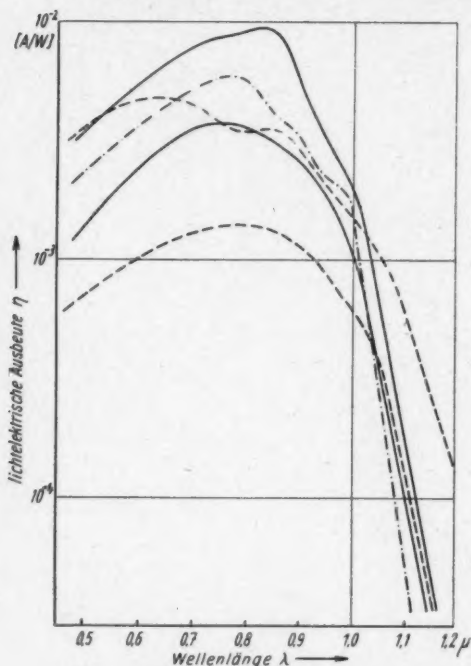


Abb. 5. Spektrale Empfindlichkeit einiger auf gleiche Weise hergestellter (Ag- Cs_2O , Cs-Ag)-Photokathoden

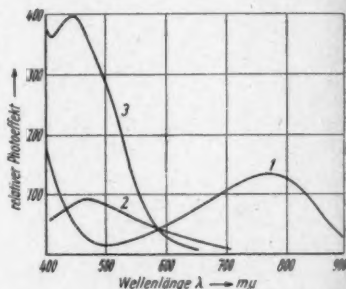


Abb. 6. Spektrale Empfindlichkeitsverteilung verschiedener Schichten Ag- Cs_2O -Cs, Bi-Cs, Sb-Cs nach Görlich

1. (Ag)- Cs_2O , Ag-Cs (undurchsichtig)
2. Cs-Bi-Legierung (durchsichtig, sensibilisiert)
3. Cs-Sb-Legierung (durchsichtig, sensibilisiert) Ordinaten untereinander vergleichbar

Suhrmann und Kressin⁶⁰⁾ finden bei Cs-Sb-Kathoden neben dem bekannten langwelligen Maximum bei $0,43 \mu$ ein Maximum im UV bei $0,33 \mu$ und ordnen das langwellige Maximum schwächer gebundenen Cs-Atomen, das kurzwellige den stärker gebundenen Cs-Atomen im $SbCs_3$ -Molekül zu. Die verschiedene Bindung, die eine additive und nicht ionogene ist, wird nach Meinung der Verfasser durch den unsymmetrischen Bau des Sb-Atoms bedingt, der sich auch im Gitter des Sb äußert.

Die Herstellung der Legierungskathoden ist im Gegensatz zur Herstellung der zusammengesetzten Kathoden verhältnismäßig einfach. Auf die Glasoberfläche

⁵⁹⁾ P. Görlich, Z. Physik 116, 704 (1940).

⁶⁰⁾ Suhrmann u. Kressin, Naturf. u. Med. in Deutschland 15, Teil 1, S. 10 (1947).

werden entweder das Cäsium-Metall und dann Antimon oder umgekehrt aufgedampft und anschließend einer Wärmebehandlung (Formierung) unterzogen. Dieses Verfahren 3—4mal wiederholt, liefert die empfindlichsten Schichten, deren Empfindlichkeit in der Regel auch noch durch Sauerstoff-Einbau gesteigert werden kann. Die Schichten werden aber oft zu dünn hergestellt. Die Querleitfähigkeit ist dann zu gering und es kommt zu Schwierigkeiten in der Elektronen-Nachlieferung, die sich vor allem bei Abbildungsversuchen mit elektronenoptischen Mitteln sehr nachteilig bemerkbar machen⁶¹⁾.

4. Technische Vervielfacher und ihre Eigenschaften

Technische SEV werden ausschließlich aus Halbleiter-Schichten aufgebaut, wobei eine bestimmte minimale elektrische Leitfähigkeit zur Elektronen-Nachlieferung notwendig ist. Reine Isolatoren kommen nur dann in Frage, sofern sie durch bestimmte Verunreinigen (Störstellen) zu „Halbleitern“ präpariert werden können. Gittereigene oder gitterfremde Störstellen haben indessen einen nicht immer völlig eindeutigen Einfluß auf die SE-Eigenschaften der Halbleiter⁶²⁾.

Praktische Ausführungsformen von Vervielfachern, deren Primär-Elektronen durch Glühkathoden erzeugt werden, sind neuerdings wieder vorgeschlagen worden⁶³⁾.

Allgemein versteht man aber heute unter SEV Verstärkeranordnungen, bei denen einfallende Lichtstrahlung die geeignet gewählten und hergestellten Photoschichten zur Elektronen-Emission anregen. Die aus den Photoschichten austretenden Elektronen werden dann durch geeignete Mittel auf die Sekundär-Elektronen emittierenden Schichten geführt und in weiteren Stufen „vervielfacht“.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen dynamischen und statischen Vervielfachern.

a) Dynamische SEV

Bei dynamischen Vervielfachern nehmen die Elektronen ihre Energie aus einem mit kleiner Amplitude wechselnden Feld auf. Diese Pendelvervielfacher haben indessen keine praktischen Ausführungsformen erreicht.

b) Statische SEV

Bei statischen Vervielfachern wird in mehrfacher Hintereinanderschaltung von Einzelstufen und entsprechend unterteilten Beschleunigungsspannungen eine möglichst optimale Ausbeute und Verstärkung erzielt. Je nach den Führungsfeldern unterscheidet man bei statischen Vervielfachern zwischen magnetisch und elektrostatisch fokussierten Vervielfachern. Abb. 7 zeigt eine schematische Übersicht über die Bauformen von statischen Vervielfachern.

Vervielfacher mit elektromagnetischem Führungsfeld haben heute für kernphysikalische Untersuchungen erneut Bedeutung. Die Abb. 8 zeigt einen magnetisch fokussierten Vervielfacher, bei dem die Platten eng einander gegenüber liegen, um möglichst hohe Feldstärken und damit große Ströme zu erreichen, ohne daß eine Begrenzung durch auftretende Raumladungen eintritt. Vor der Anode ist

⁶¹⁾ Wesentliche Verbesserung der Querleitfähigkeit bringt das Aufdampfen einer Ag-Sb-Legierung.

⁶²⁾ K. G. Geyer, Ann. Physik 42, 24 (1942).

⁶³⁾ C. W. Mueller, Proc. Inst. Radio Engrs. (2) 1950, 159—164.

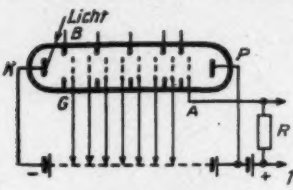
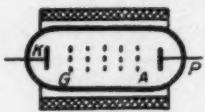

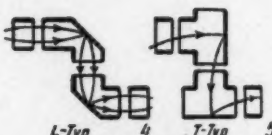



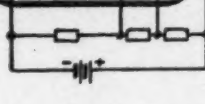
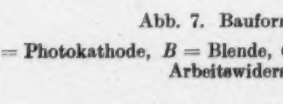


| Prinzip | Stufen- zahl | Stufen- verst. | Gesamt- verst. | Gesamt- Spg. | Urheber |
|---|-----------------|-------------------|-------------------|---|--|
|    | <i>a</i> | <i>v</i> | <i>V</i> | <i>U</i> | Zworykin (1930) Weiss (1935) (el. fokussiert) |
| | 10 | 2,5 | $8 \cdot 10^3$ | 800 V | Kluge u. Weiss (1936) (magn. fokussiert) |
| | 15 | 2,6 | $2 \cdot 10^6$ | 1400 V | s. Abb. (Durch Wand- ladungen fokussiert) |
|    | 2—3 | 8 | ~ 60 | ~ 600 V (200— 400 V je Stufe) | Zworykin (1936) |
| | | | | 300 V | Jarvis u. Blair |
| | 16 | 5,6 | 10^{12} | 2400 V | Zworykin u. Rajchman (1939) |
|    | 9 | 3,6 | 10^5 | 900 V | Rajchman u. Snyder (1940) (s. Abb.) |
| | 10 | 2,8 | $3 \cdot 10^4$ | 500 V | Slepian- Zworykin (50—100 Gauß) (1936) |
|   | 15 | 2,93 | 10^7 | 800 V | Kluge, Bayer, Steysskal (1937) |
| | 9 | 3,14 | $3 \cdot 10^4$ | 1000 V | |

Abb. 7. Bauformen von statischen Vervielfachern

(K = Photokathode, B = Blende, G = Prallnetz, A = Anode, P = Prallfläche, R = Arbeitswiderstand, D = Glas-Distanzringe)

in der Regel ein Schirmgitter vorgesehen, um die Schwingungsneigung des Vervielfachers zu beheben. Das erforderliche magnetische Feld von etwa 50–100 Gauß ist auch bereits durch geeignete Permanentmagnete zu erzeugen.

Da die SE stets von Elektrode zu Elektrode beschleunigt werden müssen, so werden in technischen Vervielfachern die Elektronen auch ausschließlich in geeignet gestalteten elektrostatischen Feldern geführt. Die geometrische Anord-

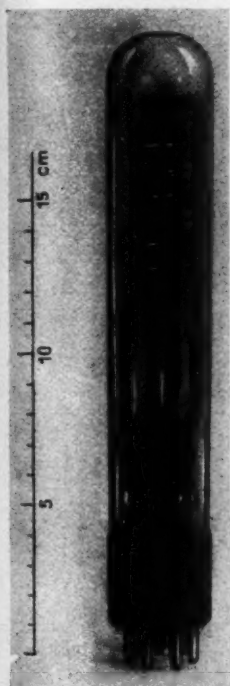


Abb. 8. Magnetisch-fokussierter Vervielfacher

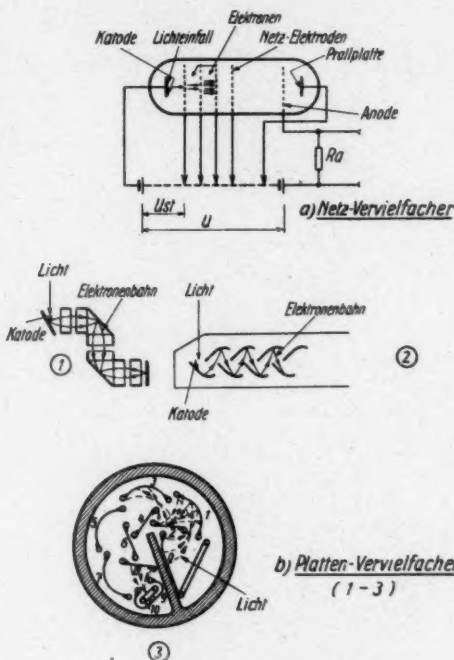


Abb. 9. Elektrostatische Sekundär-Elektronen-Vervielfacher

nung der einzelnen Stufen ergibt sich aus der Art und Form der Elektroden (Abb. 9). Bei Netzvervielfachern (Abb. 9a) sind die feinmaschigen Netze meist vertikal nacheinander angeordnet, bei Platten-Vervielfachern je nach Ausbildung der Platten (Abb. 9b).

Die auf Zworykin und Weiss zurückgehenden Netzvervielfacher wurden in Deutschland vor und während des Krieges von Telefunken, der AEG und der Fernseh AG. hergestellt. Nach dem Kriege werden neben Vervielfachern der genannten Firmen auch Plattenvervielfacher der Firma Maurer und vor allem Vervielfacher der RCA in Deutschland bekannt. Abb. 10 zeigt den Prinzipaufbau eines Netzvervielfachers, bei dem die Netze nach Art des Aufbaues von Kathodenstrahlensystemen entweder auf Keramikstäbchen oder auf Glimmerleisten im Ab-

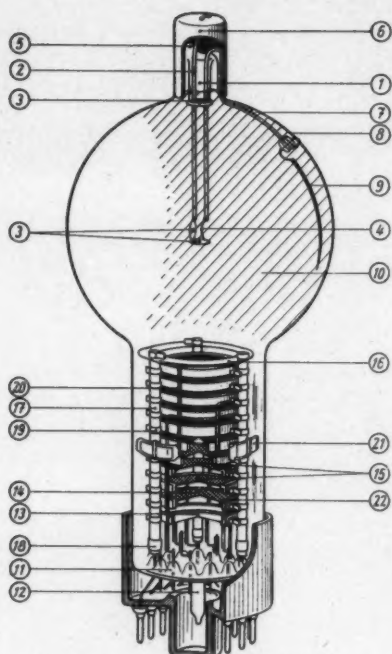


Abb. 10. AEG—SEV (11-stufig)

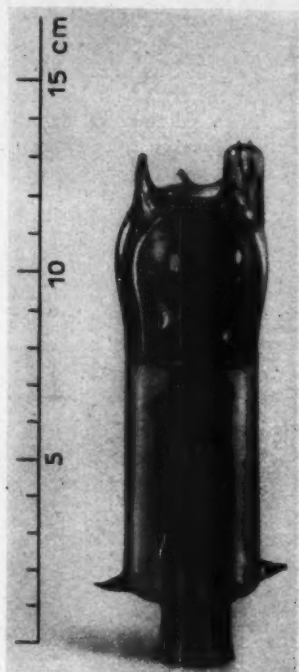


Abb. 11. Fernseh-SEV (18-stufig)

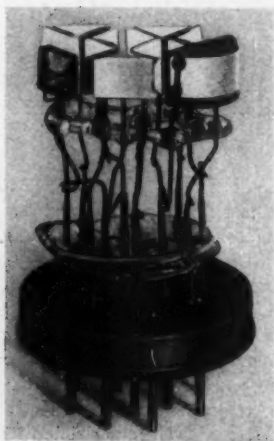


Abb. 12. Maurer-Kasten-vervielfacher



Abb. 13. RCA—SEV (9-stufig)

stand von etwa je 5–10 mm aufgereiht werden. Offenbar zur besseren Isolation wurde von der Fernseh AG. ein Netzvervielfacher gebaut, bei dem die Netze einzeln ausgeführt wurden (Abb. 11). Einem ähnlichen Prinzip, wenn auch nicht mit der gleichen Konsequenz, folgt der nach dem Kriege von der Firma Maurer herausgebrachte Kastenvervielfacher (Abb. 12). In der Abb. 13 ist ein Plattenvervielfacher der Radio Corporation of America in USA gezeigt. Nach dem Kriege sind auch in der DDR SEV entwickelt und in den Handel gebracht worden, deren Elektrodenaufbau von den bisherigen Ausführungen abweicht (Abb. 17).

c) Photokathoden

Die Eigenschaften sind in Tabelle 5 gegenübergestellt:

| Schicht | Empfindlichkeitsmax. [μm] | langw. Grenze [μm] | mittlere Empfindlichkeit ⁶⁴⁾ [$\mu\text{A/lm}$] | therm. Emission A/cm^2 | Quantenausbeute (%) |
|--|--|---------------------------------|--|---------------------------------|---------------------|
| Schichtkathode: $\text{Ag}-\text{Cs}_2\text{O}-\text{Ag}-\text{Cs}$ | 0,75–0,8 | 1,1–1,3 | 20–50 | 10^{-12} | 0,1–1 |
| Legierungskathoden: | | | | | |
| Cs_2Sb | 0,45 | 0,7 | 30–100 | 10^{-15} | 1–10 |
| $\text{Cs}-\text{Bi}$ mit O_2 | 0,46 | 0,8 | 10–25 | | |
| $\text{Cs}_2\text{Sb}-\text{Cs}-\text{Bi}$ | 0,45 | 0,8 | 20–80 | | |
| LiSb | 0,43 | 0,57 | 5–20 | 10^{-17} | |

Die Herstellungsverfahren der Schicht- und Legierungskathoden sind bereits unter 3. ausführlich beschrieben.

d) Verstärkungsfaktor

Das Verstärkersystem wird im allgemeinen durch den Verstärkungsfaktor V (= Gesamtvervielfachung) als Quotient von Ausgangs/Eingangs-Strom gekennzeichnet. Dieser Verstärkungsfaktor ist von der Stufenzahl, Art und Herstellungsbedingungen der Vervielfacher-Elektroden und überdies noch von der Elektronen-Energie (Gesamtspannung) abhängig. Es ist daher nicht verwunderlich, wenn sich für den Verstärkungsfaktor V eines bestimmten Vervielfachersystems kein einfacher Zusammenhang mit der Stufen- bzw. der Gesamtspannung ergibt. Abb. 14 zeigt, daß im normalen Arbeitsbereich

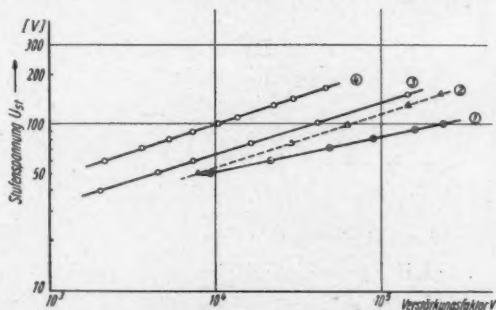


Abb. 14. Verstärkung V von verschiedenen 11-stufigen SEV mit Netzelektroden

⁶⁴⁾ Für Wolfram mit einer Farbtemperatur von 2380° K.

der SEV zwischen U bzw. U_{et} und V_{Ges} näherungsweise ein exponentieller Zusammenhang besteht:

$$V = \text{konst} \cdot U^\beta; \quad (1)$$

wobei β für 7stufige Vervielfacher im Mittel bei 2,5 und β für 11stufige Vervielfacher im Mittel zwischen 3 und 5 liegt.

Die Verstärkung wird somit durch eine Spannungsänderung exponentiell beeinflusst, d. h., die Nachweisbarkeit kleinster Leuchtdichten und Bestrahlungsstärken kann unter Umständen auch durch die „Welligkeit“ $\frac{\Delta U}{U}$ der Gesamtspannung begrenzt sein.

e) Rauschigenschaften von SEV

Die mit Rauschen bezeichneten Schwankungs-Erscheinungen kommen durch zeitliche statistische Dichteschwankungen der Ladungsträger zustande, wobei für die Dichteschwankungen verschiedene Ursachen verantwortlich⁶ sind und zwar:

1. Schrott-Rauschen: Statistische Schwankung des Elektronenstromes.
2. Funkeffekt: spontane Änderungen der Photokathoden-Emission.
3. Stromverteilungs-Rauschen: Statistische Schwankungen der Stromverteilung auf mehrere Elektroden.
4. Ionen-Rauschen: Wechselwirkung der Elektronen mit Gasmolekülen oder durch Ionen-Emission.
5. Isolations-Rauschen: Statistische Schwankung der Isolation bzw. statistischer Anteil des Isolationsstromes.
6. Influenz-Rauschen: Wenn die Frequenz vergleichbar mit der Elektronenlaufzeit.

Für SEV kommen zwar prinzipiell die gleichen Rauschursachen in Frage, doch können in dieser Zusammenfassung die Effekte 2, 4 und 6 vernachlässigt werden. Während sich bei Elektronenröhren der Isolationseffekt verhältnismäßig leicht vermeiden läßt, so spielt er bei SEV eine nicht mehr vernachlässigbare Rolle und wird durch die Herstellung der Emissions-Schichten im aufgebauten Zustand des SEV und durch die sich auf kleine Abstände auswirkenden relativ hohen Spannungen begünstigt.

Allgemein wird das Rauschen durch das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\Delta i^2}$ einer Rauscheinströmung beschrieben.

Ist I der Augenblickswert des Stromes und i der zeitliche Mittelwert, dann ist das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\Delta i^2}$ das zeitliche Mittel der Quadrate $(I - i)$. Das Quadrat des Effektivwertes $\overline{\Delta i^2}$ ist also:

$$\overline{\Delta i^2} = \overline{(I - i)^2};$$

Für den Schrotteffekt des (gesättigten) Photostromes gilt nach Schottky⁶⁵)

$$\overline{\Delta i^2}_{\text{Schr}} = e \cdot i_{\text{ph}} \cdot \Delta f; \quad \text{oder} \quad \sqrt{\overline{\Delta i^2}_{\text{Schr}}} = 0,566 \cdot 10^{-9} \sqrt{i_{\text{ph}} \Delta f} [A]. \quad (1)$$

Bei auftretenden Raumladungen tritt eine Schwächung des Schrottstromes auf, die durch den Schwächungsfaktor F_0 für Raumladung berücksichtigt wird, im

⁶⁵) W. Schottky, Ann. Physik 57, 541–567 (1918). C. J. Bakker u. van der Pol, C. r. Radio Sci. Venice 5, 217–227 (1938).

allgemeinen aber bei Photozellen keine Rolle spielt, da in der Regel nicht im Raumladungsgebiet gearbeitet wird:

$$\overline{\Delta i_{\text{Schr}}^2} = 2 \cdot e \cdot F_0^2 \cdot i_{\text{ph}} \cdot \Delta f. \quad (2)$$

Da bei einem mittleren Photostrom i_{ph} innerhalb eines beliebigen Zeitintervalles T im Mittel \bar{n}_T Elektronen übergehen, so ist

$$\begin{aligned} \bar{n}_T e &= i_{\text{ph}} \cdot T; \\ \overline{\Delta i_{\text{Schr}}^2} &= \frac{2 i_{\text{ph}}}{\bar{n}_T} \cdot \Delta f. \end{aligned} \quad (3)$$

Das Stromschwankungsquadrat $\overline{\Delta i^2}$ ist demnach proportional dem Quadrat des Photostromes und umgekehrt proportional der Zahl der je sec übergehenden Ladungsgruppen $\bar{n}_{T/T}$. (Diese Gleichungen gelten prinzipiell auch im Anlaufstromgebiet⁶⁶⁾).

Auch für einen n -stufigen SEV gilt eine analoge Beziehung⁶⁷⁾:

$$\overline{\Delta I_R^2} = 2 e \delta_i^n I_a \cdot \Delta f; \quad (4)$$

und δ_i ganzzahlig (= ideal) ist.

Im allgemeinen ist die mittlere Ausbeute δ nicht ganzzahlig. Der dadurch zusätzlich auftretende Schrotteffekt der Sekundär-Emission ist von mehreren Autoren⁶⁸⁻⁷⁴⁾ untersucht worden. Die auch auf statistischer Grundlage durchgeführten Ableitungen ergaben, daß das zusätzliche Rauschen der Sekundär-Emission für einen mehrstufigen SEV gegeben ist⁶⁹⁾:

$$\overline{\Delta I_R^2} = V^2 \cdot \overline{\Delta i_{\text{ph}}^2} + 2 e \bar{I}_a \left[\frac{V-1}{\delta-1} \right] \cdot \delta \cdot b \cdot \Delta f;$$

wobei I_a = Anodenstrom

$V = \delta^n$ = Gesamtvervielfachung.

Da bei 9- bis 11stufigen SEV die Gesamtverstärkung $V \gg 1$, so ist

$$\overline{\Delta I_R^2} = V^2 \overline{\Delta i_{\text{ph}}^2} + 2 e V I_a \Delta f \left[\frac{\delta}{\delta-1} \right] \cdot b.$$

Der durch Sekundär-Emission auftretende zusätzliche Rauschfaktor ist von der Ausbeute abhängig, und zwar immer kleiner je größer δ . Der Gesamttauschstrom auf den Rauschanteil $\overline{\Delta i_{\text{ph}}^2}$ des Photostromes i_{ph} bezogen, wird somit:

$$\overline{\Delta I_R^2} = V^2 \overline{\Delta i_{\text{ph}}^2} + V^2 \overline{\Delta i_{\text{ph}}^2} \left(\frac{\delta}{\delta-1} \right) \cdot b; \quad (5)$$

⁶⁶⁾ W. Schottky, Ann Physik 104, 248-274 (1937).

⁶⁷⁾ Anschaulich kann man sich vorstellen, daß der Rauschstrom des Photostromes genau so wie ein eingepprägter Signalstrom im SEV vervielfacht wird.

⁶⁸⁾ V. K. Zworykin, G. A. Morton u. L. Malter, Proc. Inst. Radio Engrs. 24, 351 (1936).

⁶⁹⁾ W. Shockly u. J. R. Pierce, Proc. Inst. Radio Engrs. 26, 321 (1938).

⁷⁰⁾ M. Ziegler, Physica 3, 1 u. 307 (1936).

⁷¹⁾ H. Bruining, Die Sekundär-Elektronen-Emission fester Körper. Springer, Berlin 1942.

⁷²⁾ W. Engbert, Die Telefonenröhre 1938, H. 13.

⁷³⁾ L. J. Hagner, Physics 6, 323 (1935).

⁷⁴⁾ B. Krovemeyer u. L. J. Hagner, Physic. Rev. 32, 952 (1937).

d. h., im wesentlichen rauscht bei SEV nur der Photostrom, die Vervielfachstufen ergaben lediglich einen zusätzlichen Rauschfaktor.

Ist die mittlere quadratische Abweichung $\beta^2 = 2b$ der Ausbeute gleich Null, dann ist das mittlere Rauschquadrat:

$$\overline{\Delta I_R^2} = V^2 \cdot \overline{\Delta i_{ph}^2} = 2 e V I_a \Delta f; \quad (6)$$

also identisch mit Gleichung (4).

In der Regel arbeitet der SEV auf einen Arbeitswiderstand R_a , der nach thermodynamischen Überlegungen⁷⁶⁾ ein thermisches Rauschen zeigt, und zwar ist das mittlere Rauschspannungs-Quadrat:

$$\overline{\Delta u_R^2} = 4 k T R_a \cdot \Delta f;$$

bzw. das mittlere Rauschstrom-Quadrat:

$$\overline{\Delta i_R^2} = 4 k T / R_a \cdot \Delta f;$$

wobei

k = Boltzmann-Konstante

T = absolute Temperatur [$^{\circ}\text{K}$]

Dabei ist R_a der ohmsche Anteil, da bekanntlich die imaginären Komponenten eines komplexen Widerstandes zur Wärmeenergie nichts beitragen, sofern R_a im untersuchten Frequenzbereich Δf konstant ist. Im allgemeinen ist das thermische Rauschen des Arbeitswiderstandes zu vernachlässigen (bei $R_a = 1 \text{ k}\Omega$ und $\Delta f = 10^4 \text{ Hz}$ ist $\sqrt{\overline{\Delta i_{th}^2}} = 4 \cdot 10^{-11} \text{ [A]}$).

Abweichungen davon sind offenbar erst bei extrem hohen Frequenzen zu erwarten, die aber durch die atomaren Dimensionen bedingt sind⁷⁶⁾, so daß sie normalerweise nicht in Erscheinung treten.

Die Rauscheigenschaften können demnach durch Eingengung des Frequenzbandes und durch Herabsetzung des statistischen Faktors verbessert werden, vorausgesetzt, daß der Rauschanteil des Dunkelstromes vernachlässigt werden kann.

In Fällen, in denen man den Frequenzumfang des SEV nicht benötigt, führt eine scharfe Bandbegrenzung (beispielsweise durch Resonanzverstärker) zu einer wesentlichen Verkleinerung des Rauschens. Resonanzkreise mit einer Bandbreite von 0,5–1 Hz machen offenbar keine Schwierigkeiten.

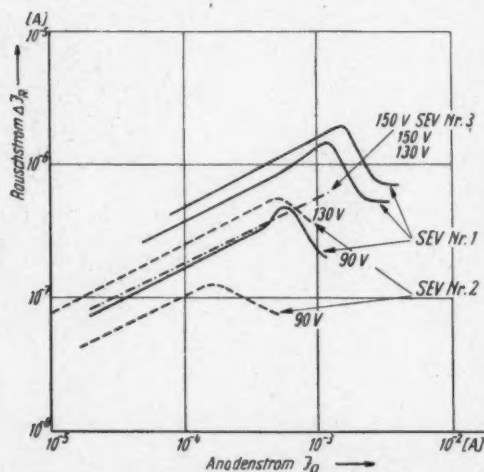


Abb. 15. Rauschstrom ΔI_R in Abhängigkeit vom Anodenstrom I_a

⁷⁵⁾ A. Nyquist, Physic. Rev. **32**, 110 (1928).

⁷⁶⁾ C. J. Bakker u. O. Heller, Physica **6**, 262–274 (1939).

Der Rauschstrom technischer SEV wurde mit einem 3stufigen Resonanzverstärker gemessen⁷⁷⁾, dessen Grundfrequenz 120 kHz und dessen Bandbreite 13 kHz betrug.

Zur Eichung und Kontrolle diente eine eingebaute Rauschdiode (AG 1006). Der Störpegel betrug max. 10 (μ V).

Das Ergebnis der Rauschmessung an verschiedenen Vervielfachern zeigt Abb. 15. Die Rauscheinströmung ist, wie nach Gl. (6) auch zu erwarten, proportional $\sqrt{I_a}$. Gleichfalls erfüllt ist die in Gl. (6) enthaltene Forderung, daß sich bei konstantem Anodenstrom I_a die Rauschquadrate wie die Gesamtverstärkungen verhalten. Die gemessenen geringen Abweichungen (3–5%) sind durch den in erster Näherung als konstant angenommenen statistischen Faktor bestimmt. Bei höheren Anodenströmen treten Raumladungserscheinungen auf, die, wie bekannt, die Rauscheinströmung und damit allerdings auch die Verstärkung herabsetzen.

f) Dunkelstrom

Der Dunkelstrom setzt sich zusammen aus dem temperaturabhängigen Isolationsstrom, dem temperaturunabhängigen Feldemissionsstrom und der thermischen Emission der Photokathode und z. T. auch aus den SE-emittierenden Schich-

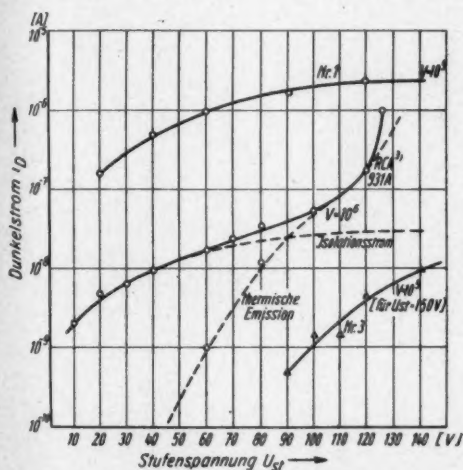


Abb. 16. Dunkelstrom von SEV in Abhängigkeit von der Stufenspannung

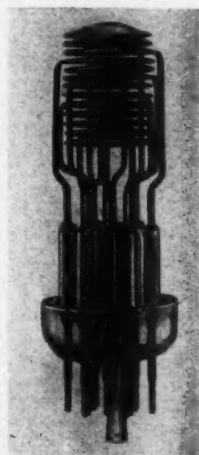


Abb. 17. Aufbau eines SEV neuerer Bauart

ten und schließlich noch aus dem positiven Ionenstrom. Obgleich sich die einzelnen Effekte abschätzen lassen, so ist eine Zuordnung des gemessenen Dunkelstromes zu den einzelnen Ursachen nicht immer so leicht möglich. Sicher ist, daß bei den bisher bei uns im Handel befindlichen Vervielfachern mit (Ag)Cs₃O, Cs-Schichten der Hauptanteil des Dunkelstromes durch die thermische Emission und durch den

⁷⁷⁾ Herrn Dipl.-Phys. A. Kunze wird an dieser Stelle für die Durchführung der Messungen gedankt.

Isolationsstrom hervorgerufen wird. In Abb. 16 ist für verschiedene Vervielfacher der Dunkelstrom in Abhängigkeit von der Stufenspannung aufgetragen. Die SEV sowie Nr. 1 und 3 haben sämtlich die gleichen Photokathoden und die gleichen Netzelektroden und unterscheiden sich doch im Dunkelstrom sehr erheblich. Zum Vergleich ist der Dunkelstrom des RCA-Vervielfachers 931A⁸¹⁾ mit eingetragen.

Diese offensichtlich wesentliche Verringerung des Dunkelstromes bei Vervielfachern neuerer Bauart (Nr. 3) wurde durch erhöhte Isolationswege der Elek-

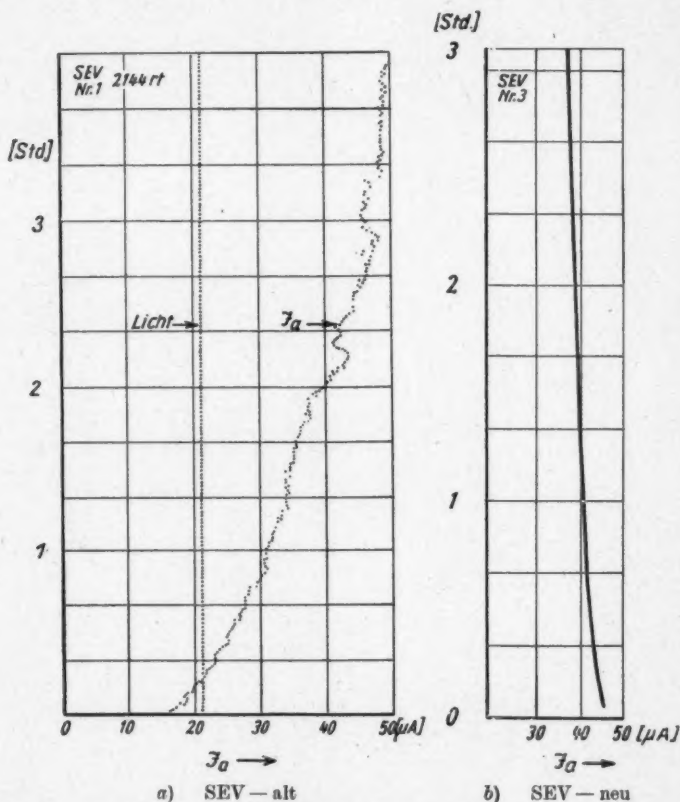


Abb. 18. Registrierkurven des Anodenstromes eines alten (a) und eines neuen Netz-vervielfachers (b)

⁷⁸⁾ Für den SEV 1 P 21 sind Dunkelströme von $1,3 \cdot 10^{-8}$ A bis $1,8 \cdot 10^{-9}$ A gemessen worden⁷⁹⁾. Es wird ferner angegeben⁸⁰⁾, daß der Signal-Dunkelstrom-Quotient bei 1 P 21 von der Sockelung bzw. von der Isolationsqualität des Sockels abhängt.

⁷⁹⁾ S. M. Feinstein, Z. techn. Physik UdSSR 18, 39 (1948).

⁸⁰⁾ A. H. Mikesell, The Astron. Journ. 54, 191–192 (1949).

⁸¹⁾ Engström, J. opt. Soc. Amer. 37, 420–431 (1947).

trodendurchführungen erreicht (Abb. 17). Während bei früheren Konstruktionen die Isolationswege von Netz zu Netz nur etwa 5 mm betrugen, so sind sie jetzt um ein Vielfaches dadurch vergrößert, daß über den getrennt ausgeführten Zuführungen noch eine möglichst lange und enge Glaskapillare angeordnet ist, die mit der Durchföhrung verblasen wird und die überdies oben noch jeweils durch eine kleine Metallscheibe abgedeckt wird. Noch höheren Ansprüchen genügt man durch eine Doppel-Kapillare, so daß eine labyrinthische Abschirmung entsteht. Diese labyrinthische Abschirmung ist notwendig, da sich beim Eindestillieren Cäsium-Dampf stets auch auf den Glaswänden niederschlägt und den Isolationswiderstand erheblich verringert. Der Isolationswiderstand der Füße für neue SEV beträgt bei einer angelegten Spannung von 150 V unmittelbar nach der Herstellung etwa $5 \cdot 10^{15}$ Ohm und fällt nach tagelanger Lagerung an Luft bis auf 10^{12} Ohm. Auch Ätzen mit Flußsäure setzt den Isolationswiderstand um 1–2 Größenordnungen herab.

g) Sonstige Störeffekte

Besonders unangenehm und störend sind die als Flackereffekte bezeichneten unregelmäßigen teilweise sehr erheblichen Änderungen der Verstärkung. Bei Fernseh-Abtasteinrichtungen werden durch solche Effekte am Kontrollempfänger unregelmäßige Zeilenaufhellungen im Raster bemerkbar, die den physiologischen Bildeindruck wesentlich stören. Diese Erscheinungen werden vermutlich durch Stoßentladungen bei schlechtem Vakuum und durch spontane Isolationsstrom-Änderungen hervorgerufen. Abb. 18 zeigt Registrieraufnahmen des Anodengleichstromes von verschiedenen Vervielfachern.

Während die Amplitudenschwankungen des Vervielfachers Nr. 1 noch recht erheblich sind, zeigt der neuere mit hochisoliertem Aufbau versehene Vervielfacher diese unregelmäßigen Amplituden-Änderungen nicht mehr. Eine in seinen Ursachen noch nicht geklärte Erscheinung ist die Einlauf-Charakteristik von SEV nach der Inbetriebnahme. Wie die Abb. 19 zeigt, verhalten sich gleich aufgebaute und nach gleichen Vorschriften hergestellte SEV völlig verschieden. Offenbar aber läßt sich diese Störung, wie die Kurven 1 und 2 zeigen, auch vermeiden.

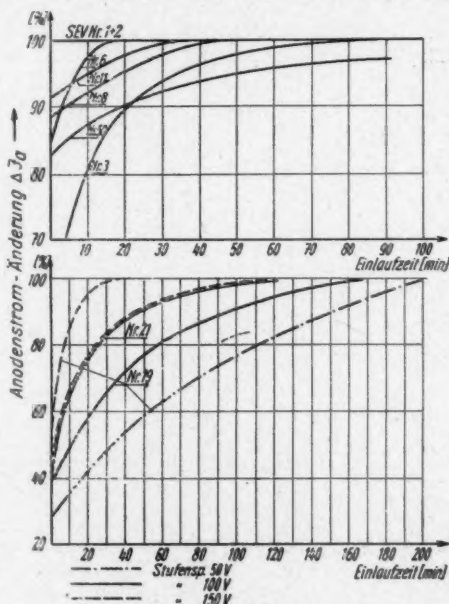


Abb. 19. Einlaufcharakteristiken verschiedener Vervielfacher

h) Signal/Rausch-Quotient

Die Güte eines Vervielfachers für Anwendung bei Wechsellicht ist im allgemeinen durch den (Signal/Rausch)-Quotienten bestimmt, der unter Vernachlässigung des Dunkelstromrauschens und der Flackereffekte allgemein gegeben ist durch:

$$(S/N)^2 = \frac{I_a}{\Delta I_R^2}; \quad (7)$$

wobei I_a = Effektivwert des Anodenstromes bei Belichtung

ΔI_R^2 = mittl. Rauschstrom-Quadrat.

Da: $I_a = i_{ph} V$ [A];

wenn: i_{ph} = prim. Photostrom [A]

und: $i_{ph} = \Phi \cdot E$ [A]

wenn: Φ = Lichtstrom [lm]

und: E = Kathoden-Empfindlichkeit [A/lm]

ist mit Gl. (6):

$$(S/N)^2 = \frac{\Phi \cdot E}{2 e \Delta f}. \quad (8)$$

Das (Signal/Rausch)-Verhältnis ist demnach vom Verstärkungsfaktor V unabhängig, steigt dagegen mit zunehmendem Lichtstrom und Kathodenempfindlichkeit.

Soweit aus anderen Gründen nicht unmöglich, wird man daher stets CsSb-Kathoden verwenden, deren hohe Stromausbeute das S/N -Verhältnis um mindestens den Faktor 2 gegenüber (Ag—Cs₂O, Ag—Cs)-Kathoden erhöht. Da in der Regel mit optischer Abbildung gearbeitet wird, so ist selbstverständliche Voraussetzung, für die Abbildung möglichst lichtstarke optische Anordnungen zu verwenden. Bei der Anwendung in der Fernsehtechnik ist allerdings zu beachten, daß bei der Übertragung von Abtastbildern die erforderliche Auflösung (beispielsweise für ein 625-Zeilen-Bild) erhalten bleibt.

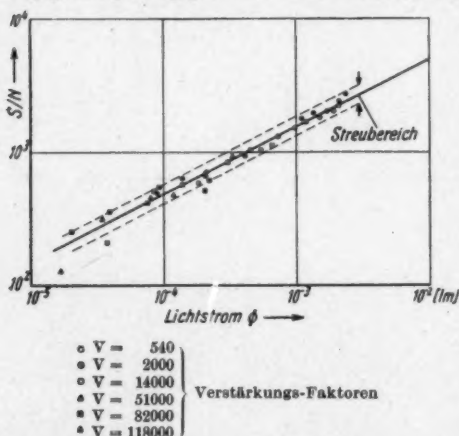


Abb. 20. Signal/Rausch-Verhältnis (S/N) in Abhängigkeit vom Lichtstrom (Φ) für SEV Nr. 3. (Die andern untersuchten SEV liegen innerhalb des eingezeichneten Streubereiches)

In Abb. 20 ist das Signal/Rausch-Verhältnis für verschiedene Verstärkungsfaktoren in Abhängigkeit vom einfallenden Lichtstrom Φ aufgetragen. Wie die vorstehende Gleichung erwarten läßt, ist das (Signal/Rausch)-Verhältnis tatsächlich proportional der Wurzel aus dem Lichtstrom und unabhängig vom Verstär-

kungsfaktor. Abb. 20 ist weiter ein Beweis, daß der Unterschied in den Kathodenempfindlichkeiten für gleichartig hergestellte Vervielfacher doch so gering ist, daß die (S/N) -Werte in der Darstellung der Abb. 20 innerhalb des gestrichelt ange deuteten Streubereiches liegen.

1) Weitere Forderungen und ihre Lösung

Die an SEV zu stellenden Forderungen ergeben sich zwangsläufig aus der Anwendung:

Eine möglichst hohe Kathodenempfindlichkeit ist selbstverständlich und ergibt sich überdies aus Gl. (8). Ferner ist strenge Proportionalität von Anodenstrom und Lichtstrom zu fordern, wobei möglichst alle lichtelektrischen ausgelösten Elektronen die SE-emittierenden Elektroden erreichen sollen. Die handelsüblichen Vervielfacher mit Netzelektroden sind in der Regel so aufgebaut, daß die Photokathode nur einen Teil des Kathodenkolbens bedeckt, damit ein Licht-eintrittsfenster bleibt. Das Potential dieser freien Flächen bleibt somit unbestimmt und kann beispielsweise durch Aufladungen zu Abweichungen von dem idealen Feldverlauf führen. Die Abb. 21 zeigt Kennlinien von Photoschichten verschiedener SEV. Die Einknickung der Photo-Strom-Saugspannungs-Kennlinien bei dem SEV Nr. 12 wird durch Wandaufladungen hervorgerufen und verschwindet, wenn durch Erhöhung des Absaugfeldes der Einfluß der Wandladungen vernachlässigbar wird. Man kann einen solchen Verlauf rekonstruieren, wenn man vor dem ersten Gitter eines Netz-SEV eine Metallelektrode einbaut und dieser Metallelektrode (beispielsweise eine Zylinderlinse) eine kleine negative Vorspannung erteilt. Der Kennlinienverlauf einer solchen Anordnung ist in Abb. 21 b gezeichnet. Bei Kastenvervielfachern wird demgegenüber der Elektronenstrom im vorbestimmten Potentialfeld einwandfrei geführt.

Bei Netzvervielfachern erhält man ebenfalls einen eindeutig definierten Potential-Verlauf, wenn man die Photokathode als Kugelkalotte ausbildet und mit

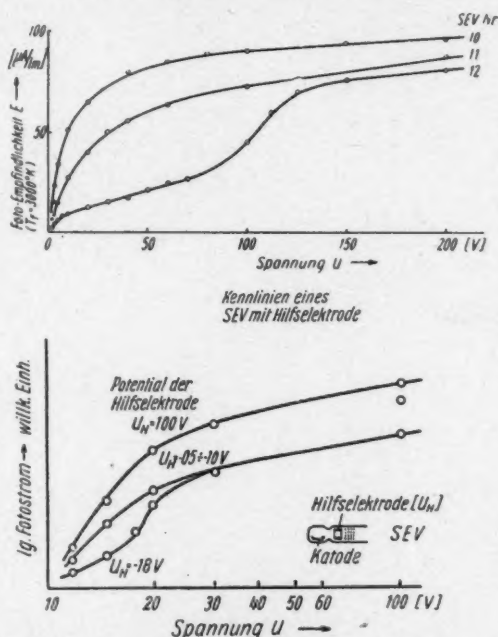


Abb. 21. Photostrom-Kennlinien verschiedener Sekundär-Elektronen-Vervielfacher

an sich bekannten elektronenoptischen Mitteln auf die erste SE-emittierende Schicht abbildet.

Auf diese Weise ist es möglich, große lichtempfindliche Flächen zu verwenden. Abb. 22 zeigt einen Vervielfacher mit Abbildungs-System, bei dem der Krümmungsmittelpunkt der Kugelkalotte mit der Linsenmitte zusammenfällt. Dadurch wird einmal erreicht, daß der Weg der Elektronen zur Linsenmitte von allen Kathodenpunkten gleich lang ist. Es ist ferner möglich, ein so hohes Feld unmittelbar vor der Kathode zu schaffen, daß die Störanfälligkeit gegen äußere Beeinflussungen der Elektronenbahnen und damit der Einfluß auf den Verstärkungsfaktor und auf die statistischen Schwankungen wesentlich herabgesetzt wird.

Eine technisch einfachere Lösung erhält man, wenn man an Stelle der einfachen Zylinderlinse eine kugelsymmetrische Anordnung wählt. Kathode und erstes

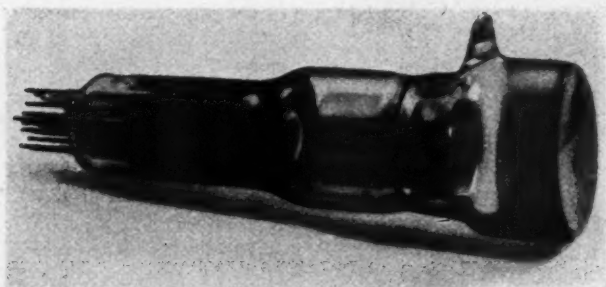


Abb. 22. SEV mit Abbildungs-System

SEV-Netz bilden so ein Kugulkondensatorfeld, dessen Fokussierung unabhängig vom Einfallswinkel der Lichtstrahlen ist (elektronenoptisches Analogon zum Schmidt-Spiegel²³⁾).

Bei Netzvervielfachern ergibt die nicht völlige Ausnutzung von senkrecht auffallenden Primärelektronen für die Zahl der Nutzelektronen ungünstige Werte. Eine bessere Nutzung ist bei schrägem Einfall der Primärelektronen oder durch schräg gestellte Stege möglich. Theoretisch besonders günstig ist die Anwendung von schrägen Stegen bei gleichzeitigem schrägen Einfall der Primärelektronen²⁴⁾.

²³⁾ Beim Hohlspiegel ist bekanntlich bei einer um den Krümmungsmittelpunkt angebrachten Blende jede Bündelachse eine Hauptachse des Spiegels, so daß Koma und Astigmatismus nicht auftreten.

²⁴⁾ W. Reichel, *Physik. Z.* **44**, 279–296 (1943).

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 1. Juli 1952.)

Der Graphitbogen als spektralphotometrisches Strahldichtenormal im Gebiet von 0,25 bis 1,8 μ

Von J. Euler

(Mit 18 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Brennt man einen Kohlebogen zwischen einer reinen, möglichst feinkörnigen Graphitanode und einer dünnen Kathode aus weitgehend beliebig wählbarem Material, so ist die Strahldichte des Positivkraters in großen Gebieten von Strom und Winkelstellung unabhängig und reproduzierbar. Aus eingehenden Messungen kann auf eine Reproduzierbarkeit von ± 1 bis 1,5% geschlossen werden, wenn die Stromstärke 0,75 bis 0,95 der Zischstromstärke beträgt und der Winkel zwischen 90 und 120° liegt. Die spektrale Energieverteilung ist durch die Plancksche Isotherme und das spektrale Emissionsvermögen gegeben. Beide werden getrennt voneinander gemessen. Für die wahre Kratertemperatur ergibt sich mit $c_2 = 1,438$ cm Grad und Pt-Schmelzpunkt $T_{Pt} = 1769^\circ$, also in der 1948 auf der 10. Generalkonferenz festgelegten Temperaturskala $W_K = 3995 \pm 20^\circ$ K. Die Fehlergrenze ist ausreichend hoch angesetzt.

Das spektrale Emissionsvermögen wird in Form einer Kurve angegeben. Die Abweichungen verschiedener Kohlen werden eingehend diskutiert. Eine Verschiebung der Temperaturskala beeinflusst das spektrale Emissionsvermögen nicht. Zwischen 365 und 415 m μ ist die Schichtdicke der Flammenstrahlung so groß, daß die Kraterstrahldichte merklich verändert wird. Die dort auftretenden starken CN-Banden müssen entweder mittels CO₂-Atmosphäre entfernt werden, oder die Dispersion muß so groß gewählt werden, daß zwischen einzelnen Bandenlinien gemessen werden kann.

1. Einleitung

Die Strahldichte des positiven Kraters eines zwischen einem reinen Graphitstift als Anode und einer beliebigen Kathode brennenden Niederstrombogens ist in einem weiten Gebiet nicht von der Stromstärke abhängig und gut reproduzierbar. Ebenso sind kleine Änderungen der gegenseitigen Lage der Elektroden ohne Einfluß. Diese Tatsache legt es nahe, den Graphitkrater als Normal zu verwenden. Seine Vorteile liegen in der hohen und relativ genau definierten Strahldichte. Die Handhabung ist gegenüber den meisten schwarzen Körpern noch als bequem zu bezeichnen; die Bogenlampe ist leicht transportabel, braucht nicht allzuviel Strom und nur einen einfachen Vorwiderstand. Eine Überwachung etwa der Netzspannung auf Schwankungen oder eine Überwachung der Kratertemperatur ist nicht erforderlich. Als Lampen lassen sich normale Nebenschlußregellampen mit periodischem Nachschub gut verwenden; die als Anode erforderlichen reinen Graphitstifte sind als spektralreine Kohlen im Handel. Als Kathode verwendet

man möglichst dünne (4 mm Dmr), verkupferte Hartkohlen. Der Bogen brennt um so ruhiger, je dünner die Kathode ist.

Das Graphitnormal ist daher als Strahldichtenormal von McPherson¹⁾ und als Leuchtdichtenormal von Patzelt u. a.²⁾ vorgeschlagen worden. Es kann aber kaum als hinreichend untersucht gelten. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das spektrale Emissionsvermögen und die wahre Temperatur des positiven Kraters möglichst genau zu ermitteln. Die Messung des Emissionsvermögens erfolgt in einem weiten Wellenlängenbereich aus Reflexionsmessungen. Das bedeutet, daß in diese Messungen die Kratertemperatur nicht eingeht. Der Anschluß an die in anderen Spektralgebieten unmittelbar gemessene Energieverteilung erlaubt hier die Trennung in Temperatur — also Plancksche Isotherme — und Emissionsvermögen. Die so gewonnene Temperatur kann durch schwarze Temperaturmessungen mit einem Glühfadenpyrometer gestützt werden. Dazu wird das Emissionsvermögen bei der Pyrometerwellenlänge zwischen etwa 2000 und 3300° K gemessen und auf 4000° K extrapoliert.

Der Temperaturmeßwert hängt an der Definition der Temperaturskala. Sollten sich der Wert von c_2 oder die Fixpunkte verschieben, so ändert sich damit auch die Kratertemperatur. Das spektrale Emissionsvermögen bleibt jedoch davon unberührt.

Darüber hinaus stellt sich die Arbeit die Aufgabe, Aussagen über die Definition zu machen, also über die Unterschiede der verschiedenen Kohlesorten und die zeitlichen Schwankungen. Weiter sollte der Einfluß der starken, blauen CN-Banden auf die thermische Strahlung gemessen werden. Im ersten Teil der Arbeit wird schließlich über die Erfahrungen berichtet, die in etwa 4 Jahren mit dem Graphitnormal gewonnen werden konnten.

2. Allgemeines, Kohlesorten

Der Graphitnormalbogen ist ein Gleichstromlichtbogen zwischen einer positiven Graphitelektrode und einer möglichst dünnen, im Material in weiten Grenzen be-

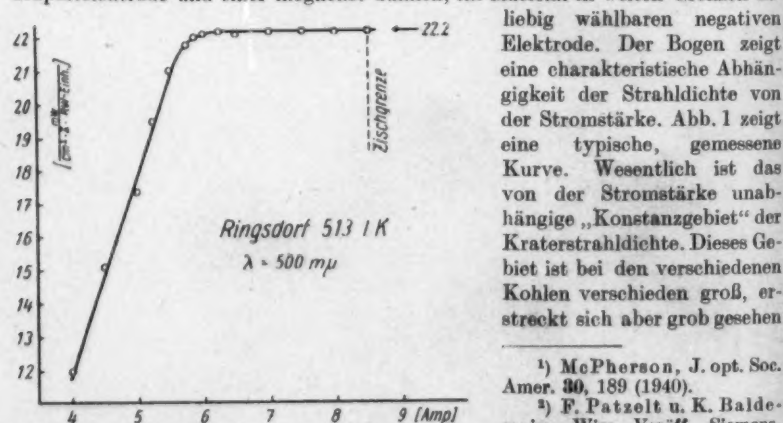


Abb. 1. Strahldichte des Graphitkraters als Funktion der Stromstärke. Kohle: Ringsdorf 513 EK, Wellenlänge $\lambda = 500 \text{ m}\mu$, Winkel 100°

liebig wählbaren negativen Elektrode. Der Bogen zeigt eine charakteristische Abhängigkeit der Strahldichte von der Stromstärke. Abb. 1 zeigt eine typische, gemessene Kurve. Wesentlich ist das von der Stromstärke unabhängige „Konstanzgebiet“ der Kraterstrahlendichte. Dieses Gebiet ist bei den verschiedenen Kohlen verschieden groß, erstreckt sich aber grob gesehen

¹⁾ McPherson, J. opt. Soc. Amer. **30**, 189 (1940).

²⁾ F. Patzelt u. K. Balde-
wein, Wiss. Veröff. Siemens-
Konzern **21**, H. 1, 213 (1943).

³⁾ F. Patzelt, Das Licht **13**,
Heft 6—9 (1943).

stets zwischen 75 und 100% der Zisch-Stromstärke. Praktisch wird man am besten zwischen 90 und 95% der Zischstromstärke arbeiten.

Die Winkelstellung der Kohle ist ebenso wie die Querschnittsform der Positivkohle nur von untergeordneter Bedeutung. Die besten Ergebnisse, also die gleichmäßigsten Krater erhält man bei einem Winkel der Kohlenachsen von 100 bis 130°. Man kann nach J. F. Forrest⁴⁾ auch mehrere Kathoden gegen eine Anode brennen lassen, doch ist auch bei sehr hohen Anforderungen eine Kathode fast immer aus-

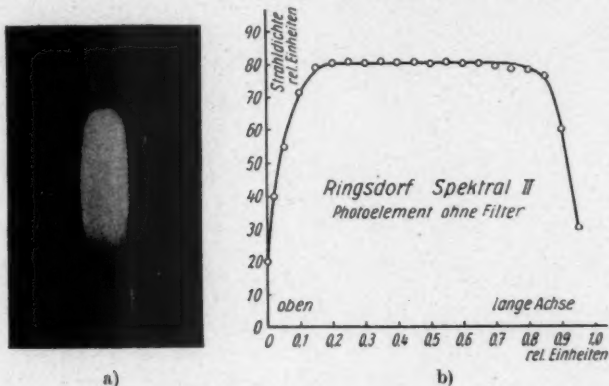


Abb. 2. a) Krater einer Rechteckkohle, Material Ringsdorff 513 EK. b) Strahllichtverteilung in der Längsrichtung

reichend. Der Kohlequerschnitt muß nicht kreisförmig sein. Abb. 2 zeigt den Krater einer Rechteckkohle von 3 · 7 mm² Querschnitt, die zur Ausleuchtung der Spektrographenspalte gut geeignet ist. Diese Kohle hat einen Strombedarf von nur rund 5,5 A, während die volle aus gleichem Material etwa 8 A braucht.

Für das Graphitnormal eignen sich hochgereinigte, graphitisierte Kohlen, von denen folgende Sorten zur Verfügung standen⁵⁾:

Tabelle 1

| Hersteller | Name | Durchmesser mm |
|------------------------|--------------------------|-------------------|
| 1. Conradty | Schweißelektrode | 6 |
| 2. Ringsdorff-Werke | 513 EK | 5 |
| 3. Ringsdorff-Werke | 658 EK bzw. 652 EK | 5 |
| 4. Ringsdorff-Werke | Spektral I | 5 |
| 5. Ringsdorff-Werke | Spektral II | 5 |
| 6. Ringsdorff-Werke | Spektral III | 8 |
| 7. Schunk und Ebe | Spektralreine Kohlen | 5 |
| 8. Siemens Plania | ARG Reinstgraphit | 9 |
| 9. National Carbon Cie | Spectroscopic Electrodes | 5,5 |

⁴⁾ J. F. Forrest, Electrician 71, 729 (1913).

⁵⁾ Allen genannten Firmen sei an dieser Stelle für ihr Entgegenkommen herzlich gedankt. Besonderen Dank schulde ich Herrn Dr. Neulirichen von den Ringsdorff-Werken, der meine Arbeiten mit Rat und Tat sehr wesentlich gefördert hat.

Projiziert man den Krater der aufgeführten Kohlesorten stark vergrößert, so erkennt man, daß die Krater mehr oder weniger ungleichmäßig strahlen. Man kann die Kohlesorten, grob gesehen, in zwei Kategorien einteilen, in solche mit (grob) granulierten (Abb. 3) und glatten Krater (Abb. 4). Diese Granulation besteht in einer „Hügellandschaft“ auf dem Krater. Soweit hier bekannt, sind die glatten Krater den aus feinst ver-
 teiltem Kohlenstoff, aus Ruß hergestellten Kohlen eigen. Die granulierten Krater findet man auf Kohlen aus Kokspulver. Für Normalzwecke kommen nur die glatten Krater in Frage. Das sind die Sorten 3, 6 und 8. Die meisten spektralreinen Kohlen sind grobkörnig, bilden granulierten Krater aus und sind für den hier vorliegenden Zweck ungeeignet.

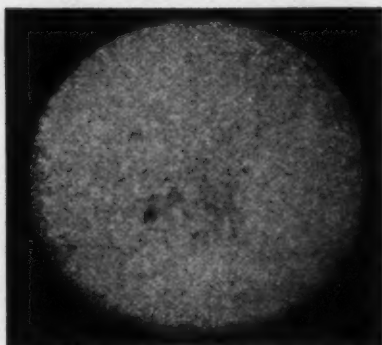


Abb. 3. Granulierter Krater, Ringsdorff 652 EK

kälter und daher dunkler. Offenbar mündet der Bodenstrom bevorzugt in die „Bergspitzen“ ein. Dabei spielen Vertiefungen von einigen 10^{-2} mm bereits eine erhebliche Rolle. Die Strahldichte der hellen Gebiete im granulierten Krater

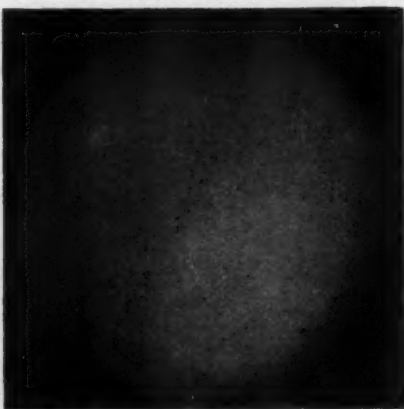


Abb. 4. Glatter Krater, Ringsdorff Spektral II

ist innerhalb der Meßgenauigkeit identisch mit der gleichmäßigen Strahldichte des glatten Kraters^{*)}. Abb. 5 zeigt eine vergrößerte Aufnahme der positiven Kohle; diese Form erwies sich als relativ konstant bei über 700 Versuchen. Wie man sieht, ist eine Höhlung nicht vorhanden. Infolgedessen findet auch keine Schwärzung der Strahlung statt, wie sie bei gedochten Kohlen leicht zu beobachten ist. Diese Tatsache ist nicht nur für die Anwendbarkeit der Meßmethode des aufprojizierten Kraterbildes, sondern ganz allgemein von erheblicher Wichtigkeit. Eine Variation eventuell vorhandener Kraterformen hätte eine Änderung der Strahlungsschwärzung und damit des Emissionsvermögens bedeutet. Der Graphitkrater strahlt nach allen Richtungen, er verhält sich dabei fast wie ein Lambertescher

^{*)} Die granulierten Krater erlauben interessante Einblicke in das Innere der Positivkohle. Man kann Temperaturverteilung und Wärmeleitvermögen ermitteln. Auf diesen Gegenstand wird in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

Strahler (Abb. 6). Diese Messungen sind mit abbildender Optik gewonnen, so daß die Einflüsse der Flammenstrahlung weitgehend ausgeschaltet werden konnten.

Der eigentliche Krater der Anode kann bei schlechter Einstellung der Kohlen zueinander schräg brennen. Dadurch wird einerseits die Stromdichte herabgesetzt und andererseits erfolgt die Energieabstrahlung unter einem anderen Winkel. Beide Tatsachen sind in weitem Umfange unbedenklich.

Für die Verwendung mit Spektralapparaten sind Kraterdurchmesser erwünscht, die eine volle Ausleuchtung der normalen Spalthöhe erlauben. Die graphitierten Kohlen brennen sehr spitz, eine 5-mm-Dmr-Kohle bildet nur einen Krater von etwa 2,5 mm Dmr aus, Kohlen von 10 mm Dmr nur einen Krater von etwa 6 mm Dmr. Die Spalthöhe üblicher Spektrographen hält sich bei 10 bis 15 mm. Will man den Spalt voll ausleuchten, so muß man den Krater 2- bis 6fach vergrößert abbilden. Soll außerdem der Prismenquerschnitt voll ausgenutzt werden, so werden an das Öffnungsverhältnis des Kondensors hohe Anforderungen gestellt. Ist v die nötige Vergrößerung und o das Öffnungsverhältnis des Kollimators, so muß der Kondensor ein Öffnungsverhältnis $u = v \cdot o$ haben. Das ergibt z. B. für 4fache Vergrößerung und einen Kollimator 1:10 bereits ein Öffnungsverhältnis 1:2,5 für den Kondensor. Man muß daher große Krater, also hohe Kohledurchmesser anstreben. Diese Forderung ist aber heute noch schwer zu erfüllen.

Die Kohlen werden durch Ausglühen mit hohen Strömen gereinigt. Dabei kommen bereits bei 5 mm Dmr erhebliche Leistungen zur Anwendung. Die Leistung muß einerseits etwa proportional zum Durchmesser der Kohle ansteigen, gleichzeitig dauert das Reinigen länger, weil die Verunreinigungen erst aus der Kohle herausdiffundieren müssen. Daher werden reinste Kohlen nur mit etwa 5 bis 6 mm Dmr geliefert. Man muß also entweder weniger reine Kohle oder weit geöffnete Kondensoren in Kauf nehmen. In der vorliegenden Arbeit diente als Kondensor ein dreilinsiges Objektiv mit 1:1,2-Öffnung, das durch eine häufig ausgewechselte Glimmerscheibe gegen aufgespritzte Kohleteile geschützt wurde. Die dickeren Graphitstifte enthalten noch Verunreinigungen, die grundsätzlich die Strahlung des Kraters nicht beeinflussen. Die verunreinigten Kohlen

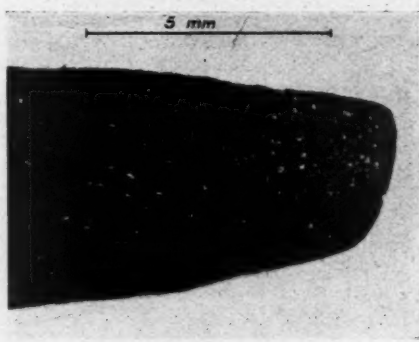


Abb. 5. Positive Graphitelektrode von der Seite bei Zimmertemperatur

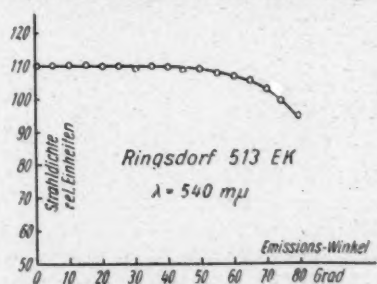


Abb. 6. Strahlendichte der Kratermitte als Funktion des Abstrahlwinkels

neigen jedoch zum „Flickern“⁷⁾ und erlauben deshalb kein ungestörtes Arbeiten. So bleibt praktisch nur die Kohle Spektral II der Ringsdorff-Werke als verwendbar übrig.

3. Messung des spektralen Emissionsvermögens

Während die Emissionseigenschaften von Graphit bei niedrigen Temperaturen im gesamten Spektrum ermittelt sind⁸⁻¹²⁾ und auch die Gesamtstrahlung des Graphitbogenkraters im sichtbaren Gebiet relativ genau vermessen ist^{2) 3)}, sind Messungen

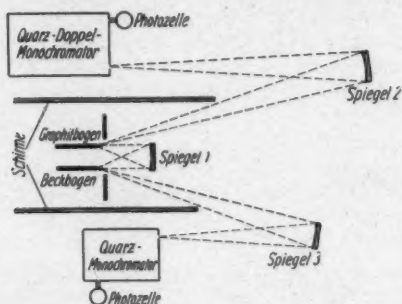


Abb. 7. Meßmethode für das Emissionsvermögen mit aufprojizierter, heißerer Strahlungsquelle

des spektralen Emissionsvermögens des positiven Graphitkraters im ultraroten und ultravioletten Spektralgebiet bisher nicht bekannt geworden. Lediglich Finkelnburg¹¹⁾ gibt im nahen UR einige angenäherte Kurven an.

Das Graphitnormal ist vor einigen Jahren schon einmal von McPherson¹⁾ vorgeschlagen worden. McPherson gibt an, daß der Krater grau strahlt, daß also das Emissionsvermögen von der Wellenlänge unabhängig ist. Der Schluß von McPherson ist jedoch nicht zwingend. Er trägt $-\log E_\lambda \cdot \lambda^5$ über

$-\left[\log \varepsilon - \frac{0,6219}{\lambda T}\right]$ auf und erhält eine Gerade. Diese Darstellung beruht auf der Planckschen Formel:

$$E_\lambda = \varepsilon_\lambda c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

$$\log(E_\lambda \cdot \lambda^5) = \log c_1 + \log \varepsilon_\lambda - \frac{M \cdot c_2}{\lambda T}$$

Darin sind E_λ die Strahldichte für die Wellenlängeneinheit, λ die Wellenlänge, ε_λ das spektrale Emissionsvermögen, T die Temperatur, M der Modul 0,4343 ($M \cdot \ln x = \log x$) und c_1 und c_2 die Konstanten des Planckschen Gesetzes. McPherson rechnet mit $c_2 = 1,432$ und erhält so $M \cdot c_2 = 0,6219$. Er schließt aus der erhaltenen Geraden, daß $\log \varepsilon_\lambda$ und damit ε_λ von λ unabhängig sind.

$|\log \varepsilon_\lambda|$ ist aber wesentlich kleiner als $\left|\frac{M \cdot c_2}{\lambda T}\right|$, so daß z. B. 10% Abweichungen für ε_λ erst die Zeichengenauigkeit überschreiten würde.

⁷⁾ J. Euler u. A. Fiebiger, Z. angew. Physik **2**, 8 (1950).

⁸⁾ W. W. Coblentz, Bull. Bur. Stand. **7**, 197 (1911).

⁹⁾ H. v. Wartenberg, Verh. dtsh. physik. Ges. **8**, 105 (1910).

¹⁰⁾ H. Kohn, Ann. Physik (4) **53**, 320 (1917).

¹¹⁾ H. Senftleben u. E. Benedikt, Ann. Physik (4) **54**, 65 (1917).

¹²⁾ F. Henning, Jb. Rad. u. Elektrot. **17**, 30 (1920).

¹³⁾ K. Warmuth, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern **7**, Heft 1, 307 (1928).

¹⁴⁾ W. Finkelnburg, Hochstromkohlebögen, Berlin 1948, S. 95.

Weiter ist von Strong und Rupert¹⁵⁾ der Kohlekrater zwischen 4 und 15 μ mit dem Globarbrenner verglichen worden. Abgesehen davon, daß bei diesen Wellenlängen die heißere Lichtquelle keinen nennenswerten Strahllichtgewinn mehr bedeutet — bei 5 μ bringt der Übergang von 2000 auf 4000° K nur noch einen Faktor 3, während bei 0,3 μ der Faktor $1,5 \cdot 10^6$ gewonnen wird — muß bei diesen Versuchen die Flammenstrahlung recht wesentlich beteiligt gewesen sein, denn aus den angegebenen Werten erhält man Emissionsvermögen bis zu 123%.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Spektralgebiet zwischen 0,25 und 1,8 μ . Um auch im kurzwelligen Gebiet arbeiten zu können, wo vergleichbare Normalstrahler völlig fehlen, wenn man vom UV-Normal als Linienlichtquelle absieht, kam eine Methode von Pirani und Conrad¹⁷⁾ zur Anwendung. Sie basiert auf Reflexionsmessungen und eliminiert die Eigenstrahlung völlig. Das ist sehr wesentlich, weil Unsicherheiten in der Temperaturmessung gerade im UV starke energetische Verschiebungen mit sich bringen.

Man bildet einen heißeren Strahler auf der anzumessenden Stelle ab und ermittelt drei Energiewerte: die Eigenstrahlung E_1 der anzumessenden Stelle, die Strahlung E_2 bei aufprojiziertem Bild und die von einem Reflexionsnormal des diffusen Reflexionsvermögens r reflektierte Strahlung E_3 des aufprojizierten Bildes. Es ist dann

$$E_2 = E_1 + R \cdot e; E_3 = r \cdot e \text{ und damit}$$

$$\frac{E_2 - E_1}{E_3} \cdot r = R = 1 - A.$$

Die Durchlässigkeit der Apparatur braucht nicht bekannt zu sein, und die Empfindlichkeit muß nur für kurze Zeit reproduzierbar sein, nämlich nur für die drei zu kombinierenden Messungen. Die Methode verlangt für die Anwendung dieser einfachen Formel allerdings, daß sowohl der zu untersuchende Strahler als auch die Vergleichsplatte dem Lambertischen cos-Gesetz folgen oder daß zum mindesten die Abweichungen bekannt sind. Eine eingehende Messung zeigt, daß die hier durch die Abweichungen hervorgerufenen Fehler sich in erträglichen Grenzen halten (< 2%).

Die Meßmethode verlangt weiter eine sehr viel energiereichere Lichtquelle zum Aufprojizieren, als die anzumessende Lichtquelle selbst darstellt. In die Rechnung geht die Differenz $E_2 - E_1$ zweier Energiewerte ein. Nehmen wir an, daß den Genauigkeitsanforderungen bei $E_2 = 1,25 \cdot E_1$ genügt sei, so kommen wir zu folgenden Verhältnissen: der Strahler 2 werde von einem Spiegel des Öffnungsverhältnisses 1:1 auf der anzumessenen Stelle in natürlicher Größe abgebildet. Das effektive Öffnungsverhältnis ist also 1:2; es nutzt von der gesamten in den Halbraum emittierten Strahlung (1:0,5) nur $\frac{1}{16}$ aus. Die völlig diffus reflektierende Meßstelle verteilt die auffallende Strahlung aber wieder auf den gesamten Halbraum und reduziert sie darüber hinaus gemäß ihrem geringen Reflexionsvermögen von etwa 25% auf $\frac{1}{4}$. Auf den Monochromatorspekt gelangen also von der Strahllichte des aufprojizierten Strahlers nur 1,5%. Um eine Erhöhung der Eigenstrahlungen um 25% hervorzurufen, muß also der aufprojizierte Strahler

¹⁵⁾ C. S. Rupert u. J. Strong, J. opt. Soc. Amer. 40 (1950).

¹⁶⁾ Herr Dr. Rupert besaß die Freundlichkeit, mir einige der von ihm und Prof. Strong verwendeten Kohlen zu überlassen, so daß eine vergleichende Messung demnächst erfolgen kann.

¹⁷⁾ M. Pirani u. K. Konrad, Z. techn. Physik 5, 266 (1924).

etwa die 20fache Leuchtdichte des zu untersuchenden Strahlers haben. In der endgültigen Anordnung fand ein elliptischer Spiegel größerer Brennweite Verwendung¹⁹⁾.

Dadurch kann man weitere Verluste durch astigmatische Abbildung kleiner halten und die Öffnung noch weiter treiben. Mit etwa dem 20fachen muß man aber unbedingt rechnen. Das ist durch hoch belastete Beckbögen unterhalb von $0,55 \mu$ zu erreichen. Man muß dabei allerdings Stromstärken bis 200 A und Wasserkühlung der Anode¹⁹⁾²⁰⁾ anwenden. Weiter sind spezielle Kohlen mit Ni-, Fe- und Cr-haltigen Dochten erforderlich²¹⁾. Eine weitere Frage bei dieser Messung ist die nach der Aufheizung der anzumessenen Stelle durch die aufprojizierte Energie, die ja zu drei Vierteln absorbiert wird. Nimmt man einen Gesamtstrahlungswirkungsgrad des Graphitbogens von 10% an und wieder die schon oben angesetzten Zahlen, also $E_2 = 1,25 \cdot E_1$ und $R = 25\%$, so erhält man eine zusätzliche Energiezufuhr von 7,5%, die wahrscheinlich unbedenklich ist, weil eine ent-

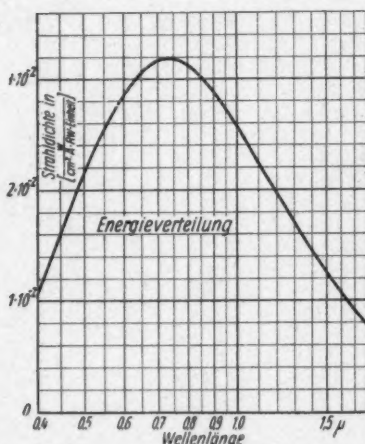


Abb. 8. Energieverteilung des Graphitkraters zwischen 400 und 1800 m μ . Die Kurve ist das Mittel aus 31 unabhängigen Meßreihen. Der Fehler der einzelnen Meßreihe ist etwa $\pm 10\%$, der Fehler des Mittels vorsichtig geschätzt $\pm 3\%$.

Stelle tritt dann die Normalplatte aus MgO. Die Strahlendeichte des Graphitbogens fällt dann über den Spiegel 2 auf den Eintrittspalt eines Spiegeldoppelmonochromators²⁴⁾ der Firma Leiß, der mit zwei 30°-Quarzprismen in Autokollimation arbeitet.

sprechend vergrößerte elektrische Energiezufuhr (Erhöhung der Stromstärke um etwa 10%) auf die Messung ist die Leuchtdichte noch keinerlei Einfluß zeigt.

Als Reflexionsnormal kommt im Sichtbaren und UV eine MgO-Schicht zur Verwendung, deren Eigenschaften im Sichtbaren von Henning und Heuse²²⁾ und im UV von Müller und Rößler²³⁾ untersucht worden sind. Die durch Strahlung zugeführte Energie verschiebt allerdings die Zischgrenze zu niedrigeren Stromstärken. Man hat also nicht bei 90 bis 95% sondern bei etwa 80 bis 85% der Zischstromstärke zu messen. Die Strahlendeichte ist aber auch im UV zwischen 80 und 95% der Zischstromstärke noch hinreichend konstant.

Die endgültige Apparatur war gegen Abb. 7 etwas verändert. Beck- und Graphitkrater werden durch einen weit geöffneten elliptischen Spiegel ($f_1 = 110$ mm, $f_2 = 740$ mm Dmr = 29,5 cm) ineinander abgebildet. Der Graphitbogen kann seitlich verschoben werden, an seine

¹⁹⁾ Der Firma Weule, Goelar danke ich herzlich für die freundliche Überlassung.

²⁰⁾ F. T. Bowditch u. M. T. Jones, J. S. M. P. E. 52, 395 (1949).

²¹⁾ W. Finkelnburg, J. S. M. P. E. 52, 407 (1949).

²²⁾ Auch hier habe ich den Ringsdorff-Werken sehr wesentlich zu danken.

²³⁾ F. Henning u. W. Heuse, Z. Physik 10, 111 (1922).

²⁴⁾ Müller u. F. Rößler, Z. techn. Physik 24, 140 (1943).

²⁵⁾ Herrn Prof. Dr. Suhrmann sei für die freundliche Überlassung auch an dieser Stelle herzlich gedankt.

Als Strahlungsempfänger dienen verschiedene Vakuumphotozellen der Firma Preßler mit Na-, K- und Cs-Kathoden. Zur Strommessung wird je nach der geforderten Empfindlichkeit mit Galvanometer oder Elektrometer gearbeitet.

Die Konstanz des Beckbogens während der Messungen wird mit einem zweiten Monochromator überwacht, der aus einem kleinen Homosilprisma und einer Quarzlinse improvisiert wurde. Als Empfänger diente hier unter anderem ein CdS-Photowiderstand²⁵⁾ der AEG, der es erlaubte, mit empfindlichen Zeiger-galvanometern auszukommen.

Im Spektralgebiet oberhalb $0,5 \mu$ wird die Energieverteilung im Spektrum ermittelt, und daraus durch Vergleich mit den entsprechenden Planckschen Isothermen das Emissionsvermögen errechnet. Die Durchlässigkeit der Apparatur

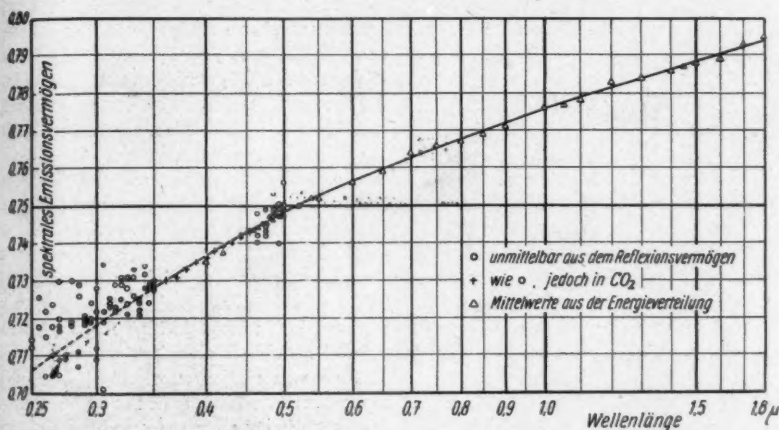


Abb. 9. Das Emissionsvermögen des Graphitkraters zwischen 0,25 und 1,8 und Anode: Ringsdorff 513 EK, Kathode: Ringsdorff Gamma S, Winkel 105° , Luft, im Banden-gebiet CO_2 .

kann hier mit Wolfram-Bandlampe, schwarzem Körper aus Platin und Silitstab genügend genau ermittelt werden. Als Empfänger dient ein Vakuumthermoelement nach Hase²⁶⁾ mit verschiedenen Galvanometern als Anzeigeelement. Aus diesem Verfahren erhält man zunächst nur die spektrale Energieverteilung Abb. 8. Das würde für den Gebrauch des Normalbogens an sich völlig ausreichen, wenn nicht für das Gebiet unterhalb $500 \text{ m}\mu$ die Angabe der wahren Temperatur nötig wäre. In diesem Gebiet ist ja das spektrale Emissionsvermögen gemessen; erst durch Multiplizieren mit der Planckschen Isotherme erhält man auch dort die erforderliche Energieverteilung.

Auf die Ermittlung der wahren Kratertemperatur wird im 6. Abschnitt dieser Arbeit eingegangen. Dazu ist eine eingehende Besprechung der Methoden zur Messung der Energieverteilung erforderlich, so daß auf die Seiten 219–224 verwiesen werden kann.

²⁵⁾ Der AEG und vor allem Herrn Dr. Schaffernicht sei für die freundliche Hilfe bestens gedankt.

²⁶⁾ R. Hase, Z. Physik 15, 52 (1923).

Die Werte des Emissionsvermögens nach beiden Methoden überlappen sich und zeigen keinen erkennbaren Sprung. Abb. 9 zeigt das spektrale Emissionsvermögen an einem Graphitbogen mit Ringsdorff 513 EK als Anode und Ringsdorff Gamma S 4 mm, hauchverkupfert, als Kathode. Der Winkel war 105° , der Bogen brannte offen in Luft. Für die Ringsdorff Spektralkohle II gelten *et. par.* etwa um 0,01 höhere Werte. Danach steigt das Emissionsvermögen von etwa 71% bei $250\text{ m}\mu$ bis auf 78% bei $2\text{ }\mu$ an. Dieses Ergebnis steht mit den Messungen anderer Autoren im sichtbaren Spektralgebiet in gutem Einklang. Als wahrscheinlichsten Mittelwert gibt Patzelt²⁷⁾ im Sichtbaren 77% an, während aus den neuen Messungen auf 76% geschlossen werden kann.

Prescott und Hincke²⁷⁾ haben das Gesamtmissionsvermögen von Acheson-Graphit zwischen 1250 und 2700°K gemessen. Sie erhalten als analytische Darstellung $\epsilon = 0,984 - 5,8 \cdot 10^{-5} T$. Setzt man den wahrscheinlichsten Temperaturwert $T = 3995 \pm 20^\circ\text{K}$ (s. S. 222) ein, so erhält man $\epsilon_{3995} = 0,752$. Dieser Wert erscheint in guter Übereinstimmung mit den neuen Ergebnissen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Messungen von Prescott und Hincke ein Temperaturintervall von 1500°K überstreichen und um 1300°K extrapoliert werden müssen.

Direkte Messungen im UV und UR liegen nicht vor, man kann lediglich aus den von verschiedenen Autoren²⁸⁻³⁰⁾ für therapeutische Zwecke angegebenen Energieverteilungsmessungen rohe Werte ermitteln, die ebenfalls die richtige Größenordnung ergeben. Bei wesentlich tieferen Temperaturen haben H. v. Wartenberg und andere²⁹⁾ keinen wesentlichen Gang mit Temperatur und Wellenlänge feststellen können. Diese Messungen sind aber kaum zum Vergleich heranzuziehen, da sie an graphitierten Fäden gemacht sind. Außerdem ändert sich das Emissionsvermögen zwischen 400 und $700\text{ m}\mu$ von 73 auf 76% ; diese geringe Abhängigkeit lag damals sicher unterhalb der Meßgenauigkeit. Schließlich zeigen eigene Untersuchungen, daß bei der Pyrometerwellenlänge von $650\text{ m}\mu$ zwischen 2000 und 3300°K nur ein geringer Gang mit der Temperatur auftritt, s. S. 222. Das Emissionsvermögen des positiven Graphitkraters verläuft bei allen untersuchten Kohlen zwischen $0,25$ und $1,8\text{ }\mu$ etwa nach den angegebenen Kurven. Der Fehler hält sich im gesamten Gebiet bei $\pm 1,5\%$. Über die geringen Unterschiede zwischen den einzelnen Graphitsorten wird in Abschnitt 5 berichtet.

4. Einflüsse der Bandenstrahlung, Schutzatmosphäre

Die Strahlung des positiven Kraters wird durch die vorgelagerten Flammen- teile beeinflusst. Da die Temperatur der Säule bedeutend höher liegt, kann sich bereits eine relativ kleine Schichtdicke störend bemerkbar machen. Die Verhältnisse werden mit abnehmender Wellenlänge immer ungünstiger.

Sieht man von den Linien der Verunreinigung als vermeidbar³¹⁾ ab, so zeigt das Spektrum (Abb. 10) vor allem Störungen durch die Cyanbanden bei 357 , 385 und $415\text{ m}\mu$ sowie die C-Linie $247,9\text{ m}\mu$. Im Sichtbaren sind noch einige rote

²⁷⁾ Prescott u. Hincke, *Physic. Rev.* **31**, 130 (1928).

²⁸⁾ J. Bleibaum, *Quantitative Strahlungsmessungen*, Jena 1931, S. 61–70.

²⁹⁾ W. W. Coblentz, M. J. Doreas, C. W. Hughes, *Strahlentherapie* **30**, 170 (1928).

³⁰⁾ E. S. Johansen, *Strahlentherapie* **6**, 45 (1915).

³¹⁾ In letzter Zeit gewonnene Erfahrungen an borarmen bzw. borfreien Kohlen deuten jedoch darauf hin, daß gewisse Mengen Bor für ein ruhiges Brennen nötig sind. Eingehende Messungen sind in Vorbereitung.

CN- und C-Banden zu sehen, die sich aber vor dem Krater nicht bemerkbar machen. Im Ultraroten war eine schwache CO-Bande bei $2,3 \mu$ zu erwarten³²⁾, die aber offenbar so schwach ist, daß sie nicht nachgewiesen werden konnte. Auch das O-Triplett $773 \text{ m}\mu$ war, da es im Gebiet maximaler Kraterstrahllichte liegt, nicht zu finden. Schließlich liegen zwischen $2,5$ und $2,9 \mu$ einige CO_2 -Banden³³⁾, die sich in Absorption bemerkbar machen. Die ultraroten Banden liegen zwar außer-



Abb. 10. Spektrum des Graphitkraters im Quarzspektrographen. a) in Luft; b) in CO_2

halb des eigentlichen, in dieser Arbeit zu untersuchenden Spektralbereiches, werden aber für die im Anschluß zu besprechenden Gesamtstrahlungsmessungen wichtig.

Die höchsten Anforderungen an den Bogen in dieser Hinsicht werden bei der Verwendung im Spektrographen gestellt; beim Arbeiten mit Monochromatoren wird im allgemeinen aus energetischen Gründen mit erheblich größeren spektralen

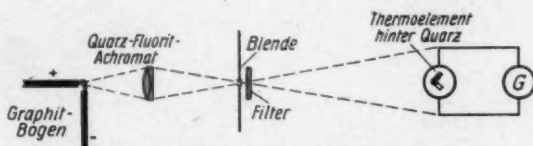


Abb. 11. Anordnung zur Abschätzung des Einflusses der Bandenstrahlung bei Gesamtstrahlungsmessungen

Spaltbreiten und verkleinerter Auflösung gearbeitet. Schließlich bleibt noch die Verwendung der gesamten Strahlung z. B. zur Absoluteichung von thermischen Strahlungsempfängern übrig, bei der eine Einengung des ausgenutzten Spektralbereiches lediglich durch die Absorptionsgebiete der durchstrahlten Medien auftritt. Eine Abschätzung bei der Anwendung der Gesamtstrahlung ergibt sich auf folgende Art und Weise (siehe Abb. 11): Der Krater wird durch einen Quarz-Fluorit-Achromaten auf einem Diaphragma abgebildet, das die Flammgebiete ausblendet. Ein Vakuumthermoelement nach Hase hinter verschiedenen Filtern erlaubt den Vergleich der verschiedenen Spektralgebiete. Die Emissionsbanden des Bogens liegen im Spektralgebiet unterhalb von $500 \text{ m}\mu$; die CO_2 -Banden bei $2,7 \mu$ werden durch ein $0,5 \text{ m}$ langes Absorptionsrohr mit Quarzfenstern, das mit CO_2 gefüllt war, während der gesamten Messung auf gleichen Werten gehalten. Ver-

³²⁾ W. Burmeister, Verh. dtsch. physik. Ges. **15**, 589 (1913).

³³⁾ G. Hertz, Verh. dtsch. physik. Ges. **13**, 617 (1911).

glichen werden daher die hinter 3 mm GG11, 3 mm OG1, 2 mm RG 1 und ohne Filter gemessenen Energien, wobei eine Korrekturrechnung wegen der durch das Filter weggeschnittenen UR-Gebiete oberhalb $2,9 \mu$ und wegen der Reflexionsverluste nötig ist. Durch die Filter begrenzen wir das Spektrum nach der kurzwelligen Seite so, daß die Bandenstrahlung auf die durchgelassenen Spektralgebiete keinen Einfluß hat. Die erste Spalte in Tabelle 2 gibt die ohne Bandenstrahlung zu erwartenden Werte an, wobei die Gesamtstrahlung gleich 100% gesetzt ist. In Spalte 2 und 3 stehen die tatsächlich hinter den Filtern ermessenen Anteile. Sie liegen etwas niedriger, was von der durch die Bandenstrahlung veränderten Energieverteilung herrührt. Die von den Filtern durchgelassenen Spektralbereiche sind nicht verändert; um sie gleich zu machen, muß also die Gesamtstrahlung höher angesetzt werden. Es ergibt sich dann eine zusätzliche Bandenstrahlung (Spalte 4), die sich bei etwa 4% hält, also einem Wert, der für Absolutmessungen gerade noch tragbar erscheint. Die Streuung der Werte in Spalte 4 und 5 rührt offensichtlich von Meßfehlern her.

Tabelle 2

| Filter | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
|------------|--|-------------------|-----------------------------|------------------|----------------------------------|
| | Berechnete Ausschläge ohne Bandenstrahlung | gemessene in Luft | Ausschläge in CO_2 | Zusätzl. in Luft | Bandenstrahlung in CO_2 |
| ohne | 100 | 100 | 100 | % | % |
| 3 mm GG 11 | 78,4 | 75,4 | 79 | 3,8 | -0,7 |
| 3 mm OG 1 | 79,3 | 76 | 78 | 4,4 | 1,6 |
| 2 mm RG 1 | 71,6 | 70 | 71 | 2,2 | 0,7 |

Die Reflexverluste am Filter sind zu 9% angesetzt

In Tabelle 2 sind Meßwerte für den Bogen in freier Luft und in Kohlensäure angegeben. Das Verfahren, die CN-Banden durch N_2 -Abfuhr wegzuschaffen, ist naheliegend und seit langem bekannt. Das CO_2 verändert die elektrischen Bogeneigenschaften erheblich, macht sich jedoch auf das Emissionsvermögen des Kraters um so weniger bemerkbar, je glatter der Krater ist. Weiter weicht in der CO_2 -Atmosphäre unter den üblichen Bedingungen, wenn also auf extreme Abfuhr von Luft nicht geachtet wird (der Abbrand lag in der vorliegenden Untersuchung noch etwas über dem von Steinle²⁴) ermittelten Wert) die positive Kratertemperatur von dem in Luft ermessenen Wert um weniger als 10°K ab. Der erheblich herabgesetzte Abbrand erlaubt ein relativ bequemes Arbeiten in der Schutzatmosphäre, da ein Kohlenwechsel nur selten notwendig ist. Man kann die normale Nebenschlußregelampe auch in der Schutzatmosphäre verwenden, wenn man der etwas veränderten Brennspannung Rechnung trägt. Der Abbrand erfolgt in CO_2 weitgehend durch die Reaktion $\text{C} + \text{CO}_2 = 2 \text{CO}$; an der Öffnung des Schutzgehäuses brennt meist eine schwache CO-Flamme. Übereinstimmend mit Angaben von Weiß²⁵) brennen die Bögen in CO_2 sehr ruhig. Nähere Einzelheiten über den Einfluß des CO_2 auf das Emissionsvermögen finden sich in Abschnitt 5 dieser Arbeit.

²⁴) H. Steinle, Z. angew. Mineralogie 2, 28 (1939).

²⁵) C. F. Weiss, Ann. Physik (5) 1, 565 (1929).

Bei der Benutzung des Graphitbogens mit dem Monochromator zusammen macht sich die Bandenstrahlung bereits erheblich unangenehmer bemerkbar. Abb. 12 zeigt das in diesem Zusammenhang interessierende Stück einer gemessenen Ausschlagkurve hinter einem Quarzdoppelmonochromator, wobei lediglich die Photozellenempfindlichkeit eliminiert ist. Wie man sieht, stört vor allem die Blende bei $385 \text{ m}\mu$, während die anderen sich nicht sehr stark auswirken. Bei Messungen in diesem Spektralgebiet muß also der Bogen im Schutzgas gebrannt werden, da die Strahlung mit der Zusammensetzung der Atmosphäre und der Flammenform variieren kann. Bei Betrieb im CO_2 ergibt sich unter den gleichen Bedingungen die gestrichelte Kurve der Abb. 12, die zeigt, daß tatsächlich die Bandenstrahlung fast völlig zurückgedrängt werden kann. Diese Kurve wurde bei Abbildung des Kraters mittels eines Quarzfluoritachromaten auf dem Monochromatorspalt gewonnen.

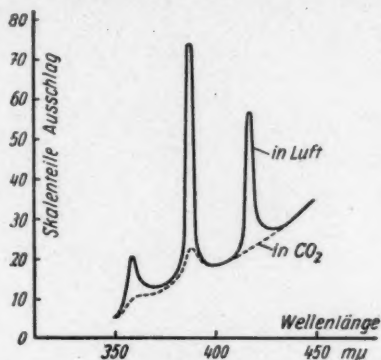


Abb. 12. Angezeigte Energiedichte hinter einem Quarzdoppelmonochromator im Gebiet der Cyanbanden

Die Spektren *a* und *d* in Abb. 13 veranschaulichen die Verhältnisse beim Monochromator. Entsprechend einer Kollimatorbrennweite von 30 cm und einer Spaltbreite von $\Delta = 0,4 \text{ mm}$ für die beiden Monochromatorenspalte wird hier ein

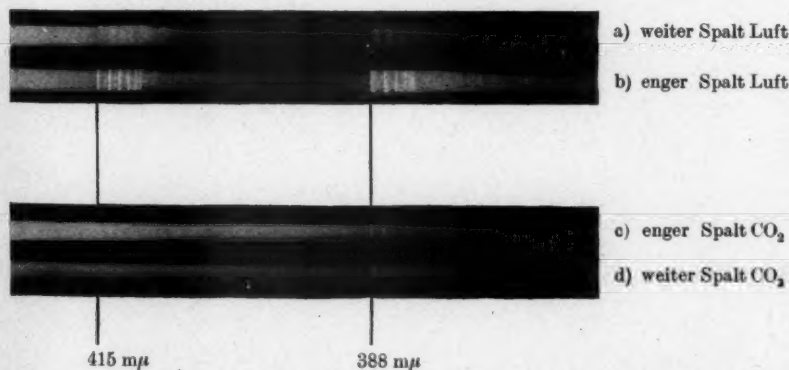


Abb. 13. Aufnahme des Bandengebietes mit größerer Dispersion und weitem (a, d) bzw. engem (b, c) Spalt in Luft (a, b) und CO_2 (c, d). Die Aufnahmen sollen die Verhältnisse im Monochromator bzw. im Spektrographen veranschaulichen

relativ breiter Spektrographenspalt verwendet. Er betrug bei einer Spektrographenbrennweite von 56 cm $\Delta = 1,0 \text{ mm}$. Wie man aus der Aufnahme sieht, ist eine wesentliche Störung des Kontinuums bei Betrieb in CO_2 nicht mehr zu erwarten.

Während die Spektren *a* und *d* bei weitem Spalt aufgenommen sind, kann man sich durch die Spektren *b* und *c* ein Bild über die Verhältnisse im Spektrographen machen. Hier sind in der Flamme auch noch einige Linien von Verunreinigungen erkennbar, die aber vor dem Krater verschwinden. Während eine Verwendung ohne Schutzgas von vornherein sehr bedenklich sein mußte, kann, wie die Photometerkurve zeigt, bis auf sehr kleine Gebiete bei 380 $m\mu$ das Spektrum auch bei den im Spektrographen vorliegenden Verhältnissen als Kontinuum betrachtet werden²⁹⁾. Es ist daher gerechtfertigt, die Kraterstrahlung unter den gemachten Voraussetzungen als durch die hohe Kratertemperatur hervorgerufenen thermisches Kontinuum anzusehen, das durch die Plancksche Isotherme und das spektrale Emissionsvermögen bestimmt ist.

5. Abweichungen verschiedener Kohlesorten voneinander und zeitliche Inkonzanz

Neben der Ermittlung des spektralen Emissionsvermögens, deren Ergebnisse im Abschnitt 3 besprochen worden sind, ist für die praktische Verwendung die Grenze der vorkommenden Abweichungen wichtig. Daher werden in einem gut

Tabelle 3

| Positiv-Elektrode | Durchm. mm | Negativelektrode | Durchm. mm | Winkelstellung ° | Emissionsvermögen % |
|------------------------|------------|------------------------------------|------------|------------------|---------------------|
| Ringsdorff-513 EK | 5 | Ringsdorff Gamma S | 4 | 160 | 73 |
| | 5 | Gamma S | 4 | 120 | 72 |
| | 5 | Gamma S | 4 | 105 | 71 |
| | 5 | Gamma S | 4 | 90 | 72 |
| | 6 | Gamma S | 4 | 90 | 74 |
| | 8 | Gamma S | 4 | 90 | 71 |
| | 11 | Gamma S | 4 | 90 | 71 |
| | 16 | Gamma S | 6 | 90 | 74 |
| Ringsdorff 658 EK | 5 | Ringsdorff Gamma S | 4 | 105 | 73 |
| | 5 | Schunk und Ebe spektralreine Kohle | 5 | 105 | 71 |
| | 5 | Conradty Homogenkohle | 6 | 105 | 72 |
| Ringsdorff Spektral II | 5 | Ringsdorff Spektral II | 5 | 105 | 73 |
| | 6 | Ringsdorff Gamma S | 4 | 105 | 73 |
| | 5 | Ringsdorff Gamma S | 4 | 90 | 72 |
| | 5 | Gamma S | 4 | 90 | 72 |
| Siemens R-Graphit | 12 | Ringsdorff Gamma S | 4 | 120 | 74 |
| | 8 | Hartocht | 4 | 120 | 74 |

²⁹⁾ Bei Betrieb in CO_2 erscheinen in der Flamme eine Reihe von schwächeren Bandensystemen, die jedoch die Kraterstrahlung nicht meßbar beeinflussen. Näheres darüber findet sich in einer demnächst erscheinenden Veröffentlichung.

zugänglichen Spektralgebiet, bei etwa 330 $m\mu$ eine große Anzahl verschiedener Graphitsorten durchgemessen, wobei auf möglichst weitgehende Variation der Betriebsbedingungen Wert gelegt wird.

Wir haben zu unterscheiden zwischen den Unterschieden, hervorgerufen durch Materialeigenschaften, Brennstellung und Atmosphäre, die an verschiedenen Normalbögen auftreten, und den zeitlichen Schwankungen ein und desselben Bogens.

Tabelle 3 gibt einen Überblick über die Unterschiede verschiedener Bögen; die Messungen sind stets Mittelwerte über größere Zeiträume und etwa 10 Kohlen. Eine Beeinflussung der Werte durch die schnell verlaufenden zeitlichen Schwankungen, über die weiter hinten gesprochen wird, muß sich in engen Grenzen halten. Danach hält sich also das Emissionsvermögen zwischen 71 und 74%, ohne daß bestimmte Einflüsse von

Material, Winkelstellung oder Durchmesser festzustellen sind. Die Meßgenauigkeit liegt bei $\pm 1,5\%$, so daß also Meßfehler die Unterschiede nicht restlos erklären können. Vermutlich liegt die Erklärung in Unterschieden der Granulation am positiven Krater. Unter dem Mikroskop erkennt man sofort, daß die Oberfläche einer benutzten Elektrode gegenüber frischen Graphitstiften eine raue Struktur zeigt. Auf das Konto unterschiedlicher Aufrauung kommt vermutlich auch der Unter-

schied des Emissionsvermögens in CO_2 und in Luft. Der Mittelwert des Emissionsvermögens bei $\lambda = 330 m\mu$ ergibt sich in CO_2 zu 72,5% und in Luft zu 72,0%. Damit dürfte eine grundsätzliche Grenze erreicht sein, die mit dem Abtragungsmechanismus des Anodenmaterials zusammenhängt.

Bei anderen Wellenlängen liegen die Verhältnisse ähnlich. Tabelle 4 gibt für die Paarungen 513 EK/Gamma S und 658 EK/Gamma S bei den Wellenlängen 300, 330 und 475 $m\mu$ die Unterschiede zwischen Luft und CO_2 wieder. Die Kohle 658 EK wurde hier, wie auch in Tabelle 3 nur herangezogen, weil sie den Einfluß der Atmosphäre hervortreten läßt. Sie zeigt schwache Granulation und kommt für gute Messungen nicht in Frage. Die granulierten, also grobkörnigen Kohlen zeigen z. T. nur unwesentlich größere Emissionsvermögen, als die glatten. Das hat seinen Grund darin, daß die Granulation im allgemeinen aus flachen Gruben besteht, in denen keine nennenswerte Strahlungsschwärzung stattfindet. Die Tiefe der Gruben z. B. bei 658 EK kann mit 1 bis $3 \cdot 10^{-3}$ mm angegeben werden, während die Durchmesser bei $5 - 8 \cdot 10^{-3}$ mm liegen. Das abweichende Emissionsvermögen wäre also kein Hinderungsgrund für ihre Verwendung. Dagegen schwankt die Temperatur beträchtlich, oft um 30° und darüber von hellen zu dunklen Stellen. Das könnte durch die Angabe einer mittleren Temperatur ausgeglichen werden, man ist aber dann auf gleichmäßige Körnung angewiesen.

Tabelle 4

| Wellenlänge | Paarung | Atmosphäre | Emissionsvermögen |
|-------------|---------------|------------|-------------------|
| 300 $m\mu$ | 513EK/Gamma S | Luft | 72 |
| | | CO_2 | 72 |
| | 658EK/Gamma S | Luft | 73 |
| | | CO_2 | 74 |
| 300 $m\mu$ | 513EK/Gamma S | Luft | 71 |
| | | CO_2 | 71 |
| | 658EK/Gamma S | Luft | 72 |
| | | CO_2 | 73 |
| 475 $m\mu$ | 513EK/Gamma S | Luft | 74 |
| | | CO_2 | 75 |
| | 658EK/Gamma S | Luft | 74 |
| | | CO_2 | 76 |

Winkel einheitlich 105°

Die einzelnen Graphitsorten und die Betriebsbedingungen verursachen Unterschiede um $\pm 2\%$ vom Mittelwert, die also über die vorn angegebene Fehlergrenze für das Emissionsvermögen von $\pm 1,5\%$ etwas hinausgehen. Die Unterschiede beim Betrieb in CO_2 liegen gegenüber Luft bei glatten Kohlen unterhalb von 0,01, bei granulierten Kratern sind sie größer und wahrscheinlich reell.

Neben den Unterschieden der verschiedenen Graphitbögen treten zeitliche Schwankungen des gleichen Bogens auf. Sie erfolgen mit Perioden von 20 sec bis zu mehreren Minuten. Die Werte der Tabelle 3 und 4 sind Mittelwerte über größere Zeiten, weil die Messung des Emissionsvermögens eine gewisse Zeit beansprucht. Tabelle 3 und 4 sind daher von schnellen Schwankungen weitgehend frei, obwohl Unterschiede und Schwankungen nicht restlos zu trennen sind. Durch Farbtemperaturmessungen ist inzwischen sichergestellt²⁷⁾, daß geringe Temperaturschwankungen die Hauptursache für die zeitlichen Schwankungen sind. Sieht man von augenscheinlichen Störungen des ruhigen Brennens ab, so unterliegt die Strahldichte des Bogens Schwankungen um wenige Promille. Im allgemeinen gelingt es ohne Schwierigkeit, die Strahldichte bei 400 $m\mu$ auf etwa 1,3% genau konstant zu halten. Mit ausgesuchtem Material läßt sich sogar eine Konstanz von $\pm 0,6\%$ über eine volle Kohlebrenndauer erzielen, wobei allerdings die Lampe gegen Luftzug geschützt sein muß. Ähnliche Werte gibt Patzelt²⁸⁾ an, der allerdings die Leuchtdichte mißt.

6. Temperaturmessung

Im Spektralgebiet oberhalb etwa 450 $m\mu$ wurde durch Vergleich mit Wolframlampe (PTB geeicht) und verschiedenen schwarzen Körpern die Energieverteilung aufgenommen. Sie ist bereits in Abb. 8 abgebildet. Wie dort angegeben, handelt es sich um den Mittelwert aus 31 unabhängigen Meßreihen. Der Eichpunkt der Bandlampe lag bei einer schwarzen Temperatur von 2600° K, also einer wahren Temperatur von rund 3000° K. Daneben standen ein schwarzer Körper aus einem Silitrohr von rund 1,5 cm Dmr und für einige Meßreihen ein schwarzer Körper mit Kohlerohr zur Verfügung. Das Silitrohr ließ sich bis auf 1800° K erhitzen, meist wurde jedoch mit 1500° K gearbeitet, da das Silit sonst schnell brüchig wurde. Das Kohlerohr arbeitete bei 2500° K noch einwandfrei, war aber im Gebrauch recht unhandlich. Nimmt man für den Graphitkrater über-

Tabelle 5

| Wellenlänge μ | Silitrohr | Faktoren für | |
|-------------------|-----------------------|----------------------|--------------------------|
| | | Kohlerohr | Bandlampe ²⁹⁾ |
| 0,2 | $1,47 \cdot 10^{-12}$ | $2,88 \cdot 10^{-5}$ | — |
| 0,3 | $3,07 \cdot 10^{-9}$ | $1,05 \cdot 10^{-3}$ | $1,17 \cdot 10^{-3}$ |
| 0,5 | $8,76 \cdot 10^{-6}$ | $1,81 \cdot 10^{-2}$ | $5,37 \cdot 10^{-3}$ |
| 0,75 | $4,63 \cdot 10^{-5}$ | $7,54 \cdot 10^{-2}$ | 0,108 |
| 1,0 | $3,32 \cdot 10^{-3}$ | 0,152 | 0,125 |
| 2,0 | $5,65 \cdot 10^{-3}$ | 0,225 | 0,172 |

Wie man sofort sieht, ist der direkte Vergleich praktisch nicht möglich. Man muß vielmehr eine möglichst genau bekannte Schwächung einschalten, die etwa

²⁷⁾ J. Euler, Z. angew. Physik 3, 260 (1951).

²⁸⁾ Spektrales Emissionsvermögen von Wolfram nach Ornstein²⁹⁾.

²⁹⁾ Ornstein, Physica 3, 561–562 (1936).

schließlich eine Temperatur von 4000° K an und ein spektrales Emissionsvermögen von $\varepsilon = 0,75$, so erhält man zwischen der Strahldichte E_r der Vergleichsstrahler und der Strahldichte E_k des Kraters die folgenden Faktoren $f = \frac{E_r}{E_k}$, die photometrisch zu überwinden sind.

einen Faktor 20 ausmacht. Man hätte versuchen können, eine derartige Schwächung mittels eines rotierenden Sektors durchzuführen, hätte aber dann diesen Sektor sehr genau vermessen müssen. Der in der vorliegenden Arbeit beschrittene Weg ist aus Abb. 14 zu entnehmen. Der Bogenkrater wird nicht unmittelbar auf dem Eintrittsspalt s_1 des Monochromators abgebildet, sondern über eine Zwischenabbildung geführt. Diese Zwischenabbildung (etwa 1:2 vergrößert) liegt auf der Fläche eines 60° -Homosil- bzw. Glasprismas. Für das Reflexionsvermögen dieses Prismas ist die Fresnelsche Gleichung maßgebend, wobei nur Einfallswinkel und Brechungsindex bekannt sein müssen. Die Abb. 15 gibt die Verhältnisse ein wenig zu ungünstig wieder, die Bündel waren 1:10 geöffnet und die größte auftretende Neigung gegen die Normale war kleiner als 8° . Damit dürften Fehler durch Polarisation noch auszuschließen sein und man kann mit den Bündelmitten rechnen, ohne einen merklichen Fehler zu begehen. Zieht man die Anordnung seitlich auseinander, so daß die größte Neigung etwa 12° gegen die Normale wird, so zeigen sich noch keine Abweichungen.

Für die Messung am Vergleichsstrahler wird die reflektierende Glasfläche gegen einen Al-Spiegel ausgetauscht, dessen Reflexionsvermögen genügend genau bekannt ist⁴⁰⁻⁴²), um keine weiteren Fehler einzuschleppen. Besondere Vorsicht ist bei dieser Methode in folgender Hinsicht geboten. Eine frisch polierte Oberfläche hat zweifellos einen anderen Brechungsindex als das massive Material im Inneren. Nun können dünne Oberflächenschichten abweichender Brechzahl die Reflexion sehr merklich verändern. Um gegen diese, schlecht zu durchschauenden Einflüsse gesichert zu sein, kamen 5 verschiedene Oberflächen zur Anwendung, geschmolzener Quarz, 1 Woche nach der Politur, ebenso 1 Jahr nach dem Polieren und drei verschiedenen alte Kronglasflächen. Die Ergebnisse dieser verschiedenen Messungen liegen mit $\pm 1\%$ aufeinander. Um gegen Selektivitäten im Monochromator gesichert zu sein, fand nicht nur der bereits auf Seite 206 erwähnte Leiss-Quarz-Doppelmonochromator, sondern daneben noch ein im Institut selbst gebauter Glasdoppelmonochromator nach Lehmann (Außenspalte fest, Innenspalte verschiebbar) Verwendung. Dieser sehr stabil gebaute Monochromator hat Prismen mit 10 cm Basis und Achromate von 30 cm Brennweite. Schließlich stand für einige Messungen noch ein Zeiß-Einfachmonochromator mit Quarz- bzw. Steinsalzprisma zur Verfügung⁴³), vor

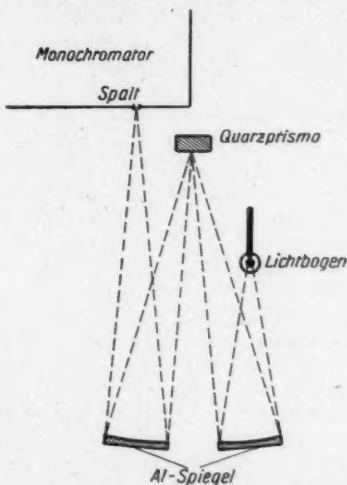


Abb. 14. Schwächung der Kraterstrahlung durch Reflexion an poliertem Quarzglas bzw. Glas

⁴⁰) W. Walkenhorst, Diss. Hannover 1940.

⁴¹) J. Barabas, Diss. Hannover 1943.

⁴²) J. Wulff, J. opt. soc. Amer. 24, 23 (1934).

⁴³) Herrn Prof. Kroepelin und Herrn Dr. Luther danke ich für die freundliche Leihgabe.

den ein kleiner Vorzerleger geschaltet wurde. Die Ergebnisse aller drei Monochromatormessungen stimmen besser als $\pm 5\%$ überein. Insgesamt wurden 31 Meßreihen zur Mittelbildung herangezogen.

Der größte Teil der Fehler kommt zweifellos durch ungenaue Temperaturbestimmungen zustande. Nimmt man für die Pyrometerwellenlänge $0,656 \mu$ einen Photometerfehler von $\frac{1}{2}\%$ an, so wird die Pyrometereichung auf die Strahldichte bezogen $\frac{1}{2}\%$ Fehler aufweisen und die Messung 1% Fehler haben. Geht man zu anderen Wellenlängen über, so wird der Fehler sich nach

$$\Delta_\lambda = \Delta_\lambda^* \cdot \frac{\lambda^*}{\lambda}$$

ändern, worin Δ der proz. Fehler der Strahldichte und λ^* die Pyrometerwellenlänge ist. Wir haben also bis etwa $0,45 \mu$ mit einem maximal möglichen Fehler von etwa $\pm 1,5\%$ zu rechnen. Dieser reine Photometerfehler enthält jedoch die Fehler, die durch das Umeichen für höhere Temperaturen auftreten, und die Fehler durch mangelhaft bekanntes c_2 noch nicht. Im allgemeinen wird man ein Pyrometer durch Anschluß an ein sekundäres Normal also etwa eine Normalbandlampe eichen. Das bedeutet, daß die Fehler dieses Normals ebenfalls eingehen. Man erhält also außer beim Anschluß an einen Metallschmelzpunkt bereits den vierfachen Photometerfehler. Geht man zu Temperaturen über, die über dem Fixpunkt liegen, so vergrößert sich der Fehler weiter durch die Fehler des Graufilters und durch die Schwerpunktsverschiebung des Rotfilters. Man wird also durch die Temperaturmessung allein mit rund 5% Fehler der Energiemessung rechnen können. Setzt man die Fehler durch die Schwächung mit dem Quarzprisma zu 2% an und berücksichtigt ferner die auch bei Doppelmonochromatoren nicht völlig zu vermeidende Fälschung durch Streulicht, so kommt man zu etwa $\pm 10\%$ Fehler der Einzelmessung. Dagegen dürften Fehler durch nicht völlig schwarze Strahlung der schwarzen Körper und durch die ungenau bekannten Reflexionsverluste R an den Wandungen der Bandlampe zurücktreten. Die letzten Fehler lassen sich durch Vergleich mit dem schwarzen Silitkörper relativ gut herausmitteln. Man stellt zunächst die schwarze Temperatur von Bandlampe S und schwarzem Körper gleich ein, etwa auf 1500°K . Dann ist für die Pyrometerwellenlänge λ^*

$$\frac{c_1}{\lambda^{*2}} \cdot \exp \left[\frac{c_2}{\lambda^* S} \right] = \frac{c_1}{\lambda^{*2}} \cdot \varepsilon_\lambda (1 - 2R) \exp \left[\frac{c_2}{\lambda^* W} \right],$$

worin W die wahre Temperatur des Wolframandes ist. Dabei ist zunächst nur S bekannt, R und ε_λ sind nur näherungsweise, W ist gar nicht bekannt. Man geht dann der Reihe nach zu anderen Wellenlängen λ über und findet dabei Unterschiede zwischen der Strahlung von

$$\exp \left[\frac{c_2}{\lambda S} \right] = f_\lambda \varepsilon_\lambda (1 - 2R) \exp \left[\frac{c_2}{\lambda W} \right]$$

schwarzem Körper und Bandlampe, die sich in einem wellenlängenabhängigen Faktor f_λ ausdrücken. Nun ist R von der Wellenlänge fast völlig unabhängig. Man kann also $(1 - 2R)$ mit Hilfe von 2 Wellenlängen eliminieren und erhält

$$\frac{1}{f_{\lambda_1} \varepsilon_{\lambda_1}} \exp \left(\frac{c_2}{\lambda_1 S} - \frac{c_2}{\lambda_2 S} \right) = \frac{1}{f_{\lambda_2} \varepsilon_{\lambda_2}} \exp \left(\frac{c_2}{\lambda_2 S} - \frac{c_2}{\lambda_2 W} \right).$$

Daraus kann die wahre Temperatur W der Bandlampe ermittelt werden, wenn die Wellenlängen weit genug auseinander liegen. Man benutzt dabei zunächst die

g für die schwarze Temperatur S , berechnet W näherungsweise, benutzt dann die bessere Näherung für ε und so fort. Ist W bekannt, läßt sich aber (mit jetzt gleichfalls bekanntem ε_λ) auch $(1 - 2R)$ bestimmen.

Da hier Messungen mit verschiedenen Vergleichsstrahlern und verschiedenen Monochromatoren innerhalb der Fehlergrenze das gleiche Resultat gaben, ist es erlaubt, aus allen 31 Meßreihen das Mittel zu bilden. Der wahrscheinliche Fehler dürfte dann erheblich kleiner sein als der Fehler einer Einzelreihe. Selbst wenn man einen systematischen Fehler der Schwächungsmethode zulassen will, dürfte die Fehlergrenze des Gesamtmittels mit $\pm 3\%$ nicht zu hoch angesetzt sein. Das gilt

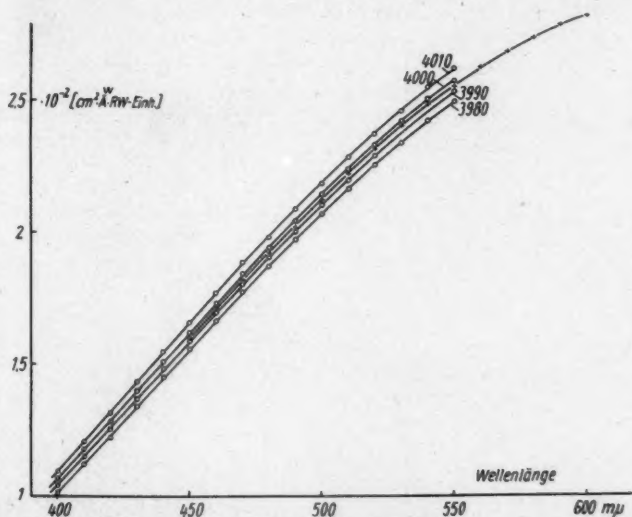


Abb. 15. Einpassen der gemessenen in die gerechneten Energieverteilungen zur Ermittlung der wahren Kratertemperatur

bereits für das kurzwellige Ende der gemessenen Energieverteilung; im langwelligen Teil ist der Fehler möglicherweise noch kleiner.

Um zu der gewünschten wahren Kratertemperatur zu kommen, findet folgendes Verfahren Anwendung. Es ist unwahrscheinlich, daß das spektrale Emissionsvermögen sich gerade zwischen $0,45$ und $0,55 \mu$ diskontinuierlich ändert. Man benutzt nun das Emissionsvermögen, das unter $0,55 \mu$ nach der Pirani-Methode direkt bestimmt ist, zur Berechnung von Energieverteilungen mit verschiedenen Planckschen Isothermen. Eine von diesen Energieverteilungen muß sich ohne Diskontinuität an die oberhalb von $0,45 \mu$ gemessene Energieverteilung anschließen. Diese Energieverteilung gehört dann zu der wahren Kratertemperatur W_K . Das Überlappungsgebiet der beiden Methoden vergrößert die Sicherheit. Das Ergebnis zeigt Abb. 15.

Die Genauigkeit dieser Temperaturengabe hängt mit der Meßgenauigkeit der Energieverteilung, hier $\pm 3\%$ und des Emissionsvermögens, hier $1,5\%$ zusammen.

Der Maximalfehler liegt also bei $\pm 4,5\%$. Das ergibt bei $\lambda = 0,5 \mu$ eine Temperaturmeßgenauigkeit von

$$\frac{dT}{T} = \frac{\lambda T}{c_2} \frac{dJ}{J} = \pm 0,63\% \quad \text{oder von } \pm 25^\circ \text{ K.}$$

Die tatsächliche Genauigkeit dürfte aber noch höher liegen, da im gesamten Überlappungsgebiet keine größere Abweichung als $\pm 5\%$ auftritt. Demnach wäre die Temperatur auf etwa ± 15 bis $\pm 20^\circ$ genau anzugeben zu

$$W_K = 3995 \pm 20^\circ \text{ K.}$$

Eine Bestätigung dieses Wertes kann wie folgt gefunden werden. Bohrt man in eine Bogenlampenkohle senkrecht zur Achse ein Loch bis etwa zur Mitte, so strahlt der Lochboden nahezu schwarz.

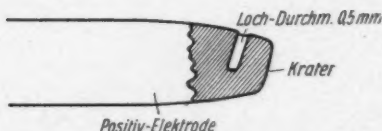


Abb. 16. Durch fortlaufendes Beobachten eines seitlichen Loches in der Anwärmszone der Anode kann auf das Emissionsvermögen bei Kratertemperatur geschlossen werden

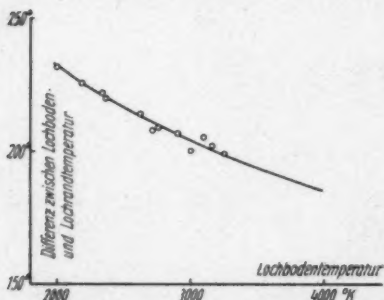


Abb. 17. Differenz zwischen Boden- (W) und Randtemperatur (S) als Funktion der Bodentemperatur W . Oberhalb 3300° K extrapoliert

Wie man erkennt, wachsen die Schwankungen von S mit steigender Temperatur stark an. Das hat seinen Grund einerseits in der mit steigender Temperatur immer schlechteren Meßgenauigkeit. Bei einem Photometerfehler von $0,5\%$ kann man bei 2000° K auf rund $0,9$, bei 3000° K nur noch auf $1,8$ und bei 4000° K nur noch auf rund 4° genau einstellen. Für die Differenz kann der doppelte Fehler auftreten, also bei 3000° K $\pm 3,6^\circ$. Da durch die Extrapolation der Fehler nochmals verdoppelt wird, haben wir bei $W = 3995^\circ \text{ K}$ $W-S$ zu $186 \pm 7^\circ$ anzusetzen. Daraus errechnet sich das Emissionsvermögen zu $76,4 \pm 0,8$. Für die schwarze Kratertemperatur erhält man bei $\lambda = 0,655 \mu$

Mißt man Lochbodentemperatur und Oberflächentemperatur, so kann man das Emissionsvermögen berechnen. Das ist aber nur zulässig, wenn Lochboden und Lochrand gleiche Temperatur haben. Das ist hier sicher auch nicht näherungsweise der Fall. Wir gehen daher anders vor. Wir verfolgen Boden- und Randtemperatur mit einem Mikropyrometer während des Abbrandes der Kohle, Abb. 16. Dabei rückt das Loch in immer heißere Gebiete. Gleichzeitig werden — wie aus älteren Messungen bekannt ist — Boden- und Randtemperatur immer ähnlicher. Wir haben also nur die Randtemperatur S als Funktion der Bodentemperatur W aufzutragen und auf $W = 3995^\circ \text{ K}$ zu extrapolieren. Die Messung von S läßt sich höchstens bis 3300° K ausdehnen, weil die letzten 700° sich auf weniger als $\frac{1}{2} \text{ mm}$ zusammendrängen. Abb. 17 zeigt $W-S$ aufgetragen als Funktion von W . Das Loch hatte hier $0,5 \text{ mm}$ Dmr (Kohle Ringsdorf Spektral II, S oben und unter gemessen, also auf einer Fläche parallel zur Kraterfläche).

$S_K = 3822 \pm 15^\circ \text{ K}$. Die relativ hohe Fehlergrenze erklärt sich aus der Schwierigkeit, das nur bis etwa 2600° K geeichte Pyrometer umzuzeichnen. Daraus erhält man mit dem Emissionsvermögen $76,4, \pm 0,8$ eine wahre Kratertemperatur von $4010 \pm 23^\circ \text{ K}$. Sowohl die Kratertemperatur als auch das extrapolierte Emissionsvermögen passen gut mit den anderweitig ermittelten Werten zusammen. Das letztere Verfahren scheint aber wegen der Extrapolation im ganzen gesehen ungenauer. Daher wird der Wert von Seite 222 als reell angesehen.

Eine weitere Bestätigung sowohl der Temperatur als auch des Emissionsvermögens kann aus Gesamtstrahlungsmessungen erhalten werden. Die Gesamtstrahlendichte \bar{E} ist einerseits

$$\bar{E} = \int_0^\infty E(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda) \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda = \int_0^\infty \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda,$$

andererseits $\bar{E} = \bar{\varepsilon} \sigma T^4$.

Für die Konstante c_2 ist die Internationale Temperaturskala von 1948 maßgebend, die $c_2 = 1,4380 \text{ cm Grad}$ ergibt. Der wahrscheinlichste Wert für c_1 , berechnet aus den universellen Konstanten c und h , ist ⁴⁴⁾ $C_1 = 5,9538 \pm 0,004 \cdot 10^{-17} \text{ abs. Watt} \cdot \text{m}^2$ (polarisierte Strahlung in die RW-Einheit).

Daraus errechnet sich $\sigma = \frac{2 \pi^5 \cdot c_1}{15 \cdot c_2^5} = 5,6805 \pm 0,004 \cdot 10^{-12} \text{ abs. W/cm}^2 \text{ Grad}^4$ (unpolarisierte Strahlung in den ganzen Halbraum).

Die angegebene Fehlergrenze berücksichtigt nur Fehler von C_1 . Damit ergibt sich für den schwarzen Körper bei $T = 3995^\circ$ eine Strahlendichte $E = 1447 \pm 1,1 \text{ W/cm}^2$. Mit einer Thermosäule, deren Empfindlichkeit zu $7,28 \cdot 10^{-2} \pm 5\% \text{ Volt/W/cm}^2$ in der PTB bestimmt worden ist ⁴⁵⁾, ergibt sich für den Kohlekrater 1180 W/cm^2 . Davon muß die Bandenstrahlung mit etwa 4% abgezogen werden. Dann erhält man für das Gesamtemissionsvermögen $\bar{\varepsilon} = 78,3 \pm 4\%$. Dieser Wert ist gut mit dem Mittelwert des spektralen Emissionsvermögens

$\bar{\varepsilon}_1 = 77,0$ in Übereinstimmung. Der Wert von $\bar{\varepsilon}_1$ ist aus dem spektralen Emissionsvermögen erhalten, das zwischen $0,25$ und $1,8 \mu$ gemessen ist. Oberhalb von $1,8 \mu$ liegen aber noch rund 17% der Gesamtstrahlung, so daß hier — ein Weiterwachsen von $\varepsilon(\lambda)$ im gemessenen Sinne vorausgesetzt — die Übereinstimmung noch besser wird.

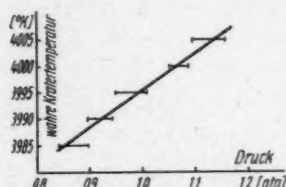


Abb. 18. Zusammenhang zwischen Luftdruck und wahrer Kratertemperatur

Tabelle 6

| Wellenlänge μm | Fehler durch das Emissions- vermög. % | Fehler durch die Tempe- ratur $\pm 20^\circ \%$ | Gesamt- fehler |
|------------------------------|---|---|-------------------|
| 200 | $\pm 1,5$ | $\pm 9,0$ | $\pm 10,5$ |
| 300 | 1,5 | 6,0 | $\pm 7,5$ |
| 400 | 1,5 | 4,4 | $\pm 5,9$ |
| 500 | 1,5 | 3,6 | $\pm 5,1$ |
| 700 | 1,5 | 2,6 | $\pm 4,1$ |
| 1000 | 1,5 | 1,8 | $\pm 3,3$ |
| 1500 | 1,5 | 1,2 | $\pm 2,7$ |
| 2000 | 1,5 | 1,0 | $\pm 2,5$ |

⁴⁴⁾ U. Stille, freundliche private Mitteilung, März 1951.

⁴⁵⁾ Herrn Dr. Bauer sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Einen merklichen Einfluß auf die Temperatur kann nach Lummer⁴⁰⁾ der Luftdruck ausüben. Er beobachtet bei 0,8 ata einen Rückgang der Leuchtdichte um 3%, dem entspricht ein Temperaturabfall von 15°. Eigene Messungen bestätigen in etwa diese Werte, wie Abb. 18 zeigt.

Die Messungen sind mit einem Glühfadenpyrometer bei 656 m μ durchgeführt, der Gang der Kurve ist durch photoelektrische Farbtemperaturmessungen überprüft. Die Berücksichtigung normaler Luftdruckschwankungen ist also nicht erforderlich.

Die Genauigkeit der Intensitätsverteilung wird einerseits durch die Meßgenauigkeit des Emissionsvermögens und andererseits durch die Meßgenauigkeit der Temperatur begrenzt. Tabelle 6 gibt einen Überblick darüber. Diese Fehler beziehen sich auf die Angabe der Strahldichte in abs. Einheiten. Für Relativmessungen sind nur Schwankungen bzw. Unterschiede maßgebend, die sich unter $\pm 2\%$ halten.

Die Arbeit ist in den Jahren 1947–1951 im Physikalischen Institut der TH Braunschweig entstanden. Dem Institutsdirektor, Herrn Prof. Dr. G. Cario, danke ich herzlich für das stete, wohlwollende Interesse, das er meiner Arbeit gewidmet hat. Herrn Oberreg.-Rat Dr. Tingwald und Herrn Dipl.-Phys. Engeling habe ich für die Durchsicht der Arbeit und viele Hinweise zu danken.

Neben den Leihgaben anderer Braunschweiger Institute, auf die im Text bereits hingewiesen worden sind, habe ich der Notgemeinschaft für den Quarzspektrographen zu danken, mit dem eine Reihe von Übersichtsaufnahmen gemacht worden sind.

Die Ringsdorfwerke, insbesondere Herr Dr. W. Neukirchen und Herr Dipl.-Phys. Rüßmann haben mich durch die Auswahl und Herstellung geeigneter Kohlesorten erst in den Stand versetzt, die Messungen auszuführen. Sie haben darüber hinaus mehrere hundert Versuchskohlen kostenfrei zur Verfügung gestellt. Ihnen gilt mein ganz besonderer Dank. Das Negativmaterial für die Aufnahmen und das Papier für die Vergrößerungen stellten die Firmen Perutz, München und Leonar, Hamburg in dankenswerter Weise zur Verfügung. Die Firma Bauer, Stuttgart überließ mir einen ausgezeichneten Regelmotor.

⁴⁰⁾ O. Lummer, Verflüss. d. Kohle, Braunschweig 1914, S. 215.

Braunschweig, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 1. September 1952.)

Niederspannungszählrohre

Von P. Kunze und G. Schulz

(Mit 14 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Für spezielle Anwendungszwecke besteht ein Bedürfnis für Zählrohre, die bereits mit einer Anodenbatterie betrieben werden können. Im Abschnitt II werden die Gesichtspunkte zusammengestellt, die zu Zählrohren niedriger Spannung führen. Im Abschnitt IV werden Messungen an solchen Niederspannungszählrohren besprochen. Unter anderem wird auch die Eignung von handelsüblichen Neonglimmrohren für Zählzwecke untersucht, welche Zählspannungen von nur 150 Volt besitzen.

I. Einleitung

In verschiedenen Veröffentlichungen der letzten Jahre wird versucht, die von Geiger und Müller¹⁾ geschaffene traditionelle Form und Betriebsart des Zählrohres mit Dampfzusatz nach Trost²⁾ abzuändern. Beispielsweise benutzt man statt des selbstlöschenden Dampfzusatzes oft Löschkreisschaltungen³⁾ mit Elektronenrohren. Man hat ferner den Gasdruck im Zählrohr, der normalerweise 10^{-1} ata beträgt, bis auf 8 ata Argon⁴⁾ gesteigert. Man hat Kleinstzählrohre von etwa 1 mm Durchmesser gebaut⁵⁾, oder im Innern großer Zählrohre Hilfgitter⁶⁾ angebracht. Schließlich hat man an Stelle der normalen Zylinderelektroden ganz andere Elektrodenformen⁷⁾ oder Plattenzähler⁷⁾ verwendet und ähnliches mehr.

In der vorliegenden Arbeit soll nun untersucht werden, inwieweit die Spannung, die bei Normalzählrohren 1–2 kV beträgt, erniedrigt werden kann. Für Zählrohre niedriger Spannung besteht in speziellen Fällen praktisches Interesse, z. B. bei medizinischen Anwendungen oder bei transportablen Geräten mit Batteriebetrieb. Während unserer Arbeit wurden Untersuchungen von Simpson⁸⁾ veröffentlicht, in denen Bau und Eigenschaften von Niederspannungszählrohren behandelt und ausgedehnte und systematische Untersuchungen darüber angestellt werden. Unsere Ergebnisse, deren Umfang durch den Mangel an Edelgasen empfindlich beschränkt wurde, mögen als Bestätigung und Ergänzung der Simpsonschen Resultate dienen, die uns Umstände halber erst stark verspätet zur Kenntnis kamen.

¹⁾ H. Geiger u. Müller, *Physik. Z.* **29**, 839 (1928).

²⁾ A. Trost, *Z. Physik* **105**, 399 (1937).

³⁾ V. Neher u. W. Harper, *Physic. Rev.* **49**, 940 (1936); I. A. Getting, *Physic. Rev.* **53**, 103 (1938).

⁴⁾ C. Robinson, *Rev. sci. Instrum.* **21**, 82 (1950).

⁵⁾ W. Libby, *Physic. Rev.* **55**, 245 (1939); S. Korff u. W. Ramsay, *Physic. Rev.* **68**, 53 (1945).

⁶⁾ E. Fireman u. Mac Haney, *Rev. sci. Instrum.* **21**, 813 (1950).

⁷⁾ W. Keuffel, *Rev. sci. Instrum.* **20**, 202 (1949).

⁸⁾ J. Simpson, *Rev. sci. Instrum.* **21**, 558 (1950).

II. Wege zur Spannungserniedrigung

Zur Erzielung niedriger Spannungen muß man das Normalzählrohr abändern, wobei im wesentlichen die folgenden vier Variablen zur Verfügung stehen:

- a) Elektrodenmaterial,
- b) Elektrodengröße,
- c) Gasdruck,
- d) Gasart.

Zu diesen vier Möglichkeiten ist das Folgende zu bemerken:

a) Elektrodenmaterial

Das Material der Anode (also des Zählrahtes) dürfte für die Betriebsspannung nicht ausschlaggebend sein, aber das Kathodenmaterial hat erheblichen Einfluß. Metallkathoden besonders niedriger Elektronen-Austrittsarbeit ergeben eine Gasentladung unter Umständen schon bei Spannungen um 100 Volt, so daß mit ihnen ein Zählrohrbetrieb schon unter 100 Volt möglich sein müßte. Wie aber Simpson⁴⁾ bereits zeigte, sind Kathoden sehr kleiner Austrittsarbeit für Zählrohrzwecke wenig geeignet, da sie wegen ihrer leichten Elektronen-Nachlieferung eine große Neigung zu spontanen Impulsen und zu Nachentladungen haben. Zählrohre mit z. B. Alkalimetall-Kathoden erscheinen darum trotz sehr niedriger Betriebsspannung nicht aussichtsreich; man wird im Gegenteil für einen stabilen Zählbetrieb Kathoden mit nicht zu kleiner Austrittsarbeit vorziehen, auch wenn sie höhere Betriebsspannung erfordern.

b) Elektrodengröße

Zwar kann man die Form der Zählelektroden stark abändern, z. B. Schneide gegen Platte benutzen, jedoch ist dadurch keine prinzipiell kleinere Betriebsspannung zu erwarten als bei der üblichen zylindrischen Anordnung, weshalb nur diese hier betrachtet wird. Dabei ist von vornherein klar, daß bei Konstanthaltung der anderen Variablen die Betriebsspannung erstens mit abnehmendem Drahtdurchmesser, zweitens mit abnehmendem Zylinderdurchmesser innerhalb gewissen Grenzen gleichfalls abnehmen wird, weil dabei die Feldstärke an der Oberfläche des Zählrahtes steigt.

Drahtdurchmesser. Sein Einfluß ist aus Abb. 1 zu erkennen, in welcher als Beispiel die Messungen an zwei Zählrohren eingetragen sind. Ordinate ist die Einsatzspannung U_0 (Volt), bei der die Rohre zu zählen beginnen. Als Gasfüllung wurde Argon plus gesättigter Quecksilberdampf von Zimmertemperatur benutzt, wobei als Abzisse der Gasdruck (Torr) dient. Die Zählrohre hatten bei etwa 50 mm Länge folgende Abmessungen:

| | Rohr-Innen- durchmesser | Draht- durchmesser |
|-------------|----------------------------|-----------------------|
| Zählrohr I | 4 mm | 0,045 mm |
| Zählrohr II | 5 mm | 1,00 mm |

Die Gasstrecke war also bei beiden Rohren ungefähr gleichgroß (2 mm). Aus den Kurven I und II (Abb. 1) entnimmt man, daß die Einsatzspannungen der beiden

Rohre bei z. B. 70 Torr Druck bei $U_I = 410$ Volt und $U_{II} = 540$ Volt liegen. Obwohl die Drahtdurchmesser sich also wie 1:22 verhalten, ist der Unterschied in der Einsatzspannung nicht groß; auch Simpson⁸⁾ fand ein ähnliches Resultat. Durch Verkleinerung des Drahtdurchmessers kann man also eine gewisse, aber keine radikale Verkleinerung der Einsatzspannung erreichen.

Zylinderdurchmesser: Wenn man ihn bei gegebenem Zählrohr verkleinert, erhält man gleichfalls eine Spannungserniedrigung; von dieser Möglichkeit ist bei den kleinen Zählrohren von Abb. 1 schon ausgiebig Gebrauch gemacht worden. Im ringförmigen Bereich nahe dem Kathodenzyylinder findet beim Normalzählrohr wegen der dort herrschenden kleinen Feldstärke praktisch noch keine Stoßionisation statt, so daß man dieses Gebiet ohne Beeinträchtigung der Zählwirkung weglassen kann. Jedoch sind der Verkleinerung des Kathodenzyinders bald praktische Grenzen gesetzt, da gleichzeitig das Zählvolumen — wenn man die Rohrlänge proportional verkleinert — mit der dritten Potenz abnimmt.

Einen ähnlichen Effekt wie durch Verkleinerung des Zylinders erhält man bei Zählrohren normaler Größe, wenn man zwischen den Elektroden ein Gitter⁹⁾ von annähernd Kathodenpotential einführt. Bei den kleinen obigen Zählrohren kann man aber von einem Gitter keine wesentlich kleineren Spannungen erhoffen, da durch den kleinen Rohrdurchmesser der Effekt schon vorweggenommen ist.

Zusammenfassend ist also zu sagen, daß man allein mit der Durchmesser-Verkleinerung von Draht und Zylinder keine große Spannungserniedrigung erreichen kann, ohne daß andere Nachteile auftreten.

c) Gasdruck

Der Einfluß des Gasdrucks auf die Zählrohrspannung bei Konstanzhaltung der andern Variablen ist bekannt und geht aus den Kurven I und II (Abb. 1) hervor, die für reine ungemischte Gase typisch sind. Nach Durchlaufen eines Minimums von 250 Volt bei einigen Torr Argon steigt die Spannung bei wachsendem Druck wieder an. Das Spannungsminimum liegt hier übrigens wegen der Anwesenheit von Hg-Dampf tiefer als in reinem Argon, wovon im nächsten Abschnitt noch die Rede ist.

Geht man also von einem Normalzählrohr mit $\sim 10^{-1}$ ata Druck aus, so kann man allein durch Druckverkleinerung die Spannung herabsetzen. Dieses Verfahren findet aber gleichfalls bald eine praktische Grenze, da mit dem Druck auch die Absorption von γ -Strahlen und die Ansprechwahrscheinlichkeit für diese sinkt. Man kommt also auch mit der Druckverringerung nicht weit, ohne andere wichtige Zählrohereigenschaften zu verschlechtern.

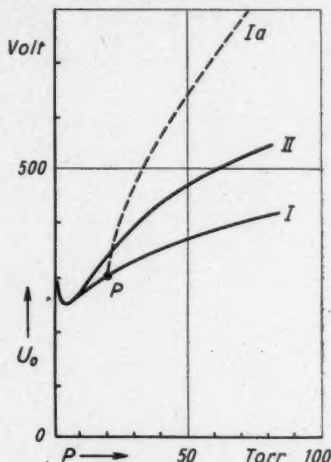


Abb. 1. Kurve I u. II: Abhängigkeit der Einsatzspannung U_0 (Volt) vom Druck (Torr) bei Zählrohren mit Argon + Hg-Dampf. — Kurve Ia: Mit Zusatz von Alkoholdampf bei konstantem Argon-Partialdruck von 20 Torr

d) Gasart

In zwei- und mehratomigen Gasen und Dämpfen, deren Molekeln Rotationen und Schwingungen ausführen, besteht für das im Feld anlaufende Elektron eine erhebliche Wahrscheinlichkeit, unelastische nichtionisierende Zusammenstöße zu erleiden, welche einen für die Entladung nutzlosen Energieverbrauch darstellen. Zählrohre mit solchen Gasfüllungen, auch bei an sich niedrigen Ionisierungsenergien, haben deshalb Einsatzspannungen, die z. T. mehr als doppelt so hoch liegen als die der einatomigen Edelgase, obwohl diese relativ hohe Ionisierungsenergien haben. Den schädlichen Einfluß mehratomiger Molekeln zeigt deutlich Kurve Ia, Abb. 1, welche den Spannungsverlauf bei wachsendem Alkoholdampf-Partialdruck wiedergibt, wenn vom Punkt *P* aus (Alkoholdruck Null) die Argonfüllung unverändert auf 20 Torr Partialdruck gehalten wird. Die Kurve Ia für Argon plus Alkohol zeigt einen viel steileren Spannungsanstieg bei wachsendem Druck als die Kurve für Argon allein.

Daraus ergibt sich als erste Tatsache, daß für Niederspannungszählrohre im wesentlichen nur Edelgase ohne zwei- und mehratomige Beimischung in Frage kommen.

Aus dieser Feststellung folgt sogleich die weitere Tatsache, daß man bei Niederspannungszählrohren auf die so bequeme Selbstlöschung des Impulses durch Alkoholdampf verzichten und elektronische Löschräte verwenden muß.

Schließlich ist für Niederspannungszählrohre noch ein dritter Punkt zu beachten: die Stufenionisation durch metastabile Anregungszustände der Edelgase, die besonders von Penning⁹⁾ untersucht wurde. Wenn man einem Edelgas mit dem metastabilen Niveau der Energie V_m ein anderes Gas der Ionisierungsenergie $V_i < V_m$ in geringer Menge zufügt, werden die Atome der Beimischung durch Zusammenstöße mit den metastabilen Atomen ionisiert. Die für die Gasentladung an sich wertlose Energie der metastabilen Zustände wird somit gleichfalls zur Ionenerzeugung benutzt und die Betriebsspannung stark herabgesetzt (siehe auch Simpson⁸⁾), ohne daß die sonstigen Zählrohreigenschaften leiden wie bei den vorher besprochenen Möglichkeiten.

Die folgende Tabelle gibt einige der möglichen Gasmischungen für Stufenionisation.

Tabelle 1
Ionisationspotential V_i und Energie V_m des ersten metastabilen Niveaus für einige Gase, beides in eV.

| | Hauptgas V_m -Werte | | | Beimischung V_i -Werte | | | | | | |
|----------|--------------------------|------|-------|-----------------------------|----------------|------|------|------|------|----------------|
| | He | Ne | Ar | N ₂ | H ₂ | A | Kr | X | Hg | J ₂ |
| $V_m =$ | 19,7 | 16,6 | 11,5 | 16,1 | 16,0 | 15,7 | 14,0 | 12,1 | 10,4 | 10,4 |
| $(V_i =$ | 24,5 | 21,5 | 15,7) | | | | | | | |

Man sieht, daß bei He und Ne als Hauptgas alle genannten Beimischungen ein $V_i < V_m$ haben, somit zur Stufenionisation benutzt werden können. Bei A als Hauptgas kommen aber nur noch Hg und J₂ als Beimischung in Frage. Für unsere Zwecke sind natürlich die zweiatomigen N₂, H₂, J₂ ungünstig.

⁹⁾ F. Penning, Z. Physik 46, 335 (1928).

Den Einfluß der Beimengung auf die Zündspannung einer Gasentladung zeigt für einige typische Kombinationen Abb. 2, die aus den Messungen von Penning⁹⁾ zusammengestellt ist.

An diesen Zündspannungen ist zweierlei bemerkenswert:

Erstens verursachen schon sehr kleine Beimengungen eine starke Senkung der Zündspannung, wobei Hg-Dampf besonders wirksam ist.

Zweitens liegt die Zündspannung des Gemisches z. T. sogar weit unter der Zündspannung der reinen Gase. Dabei hat reines Argon trotz relativ kleinem V_i (15,7 V) eine höhere Zündspannung als reines Neon mit relativ großem V_i (21,5 V).

Zum Schluß sei noch auf Abb. 3 verwiesen, welche nach Penning¹⁰⁾ die Zündspannung von reinem und argonhaltigem Neon als Funktion des Druckes zeigt. Man sieht, daß die Druckabhängigkeit im reinen Edelgas ganz anders verläuft als im Edelgas mit Stufenionisation. Einen ähnlichen Verlauf wie diese Zündspannungen zeigen übrigens auch die von uns gemessenen Zählrohr-Einsatzspannungen im (vom Hg-Dampf abgesehen) reinen Edelgas (Abb. 1) und im Edelgas mit Stufenionisation (Abb. 9 und 13).

Dort, wo beim reinen Gas das Minimum der Zündspannung und der Zählrohrsatzspannung liegt, also bei einem Druck von einigen Torr, ist der Argonzusatz fast wirkungslos; erst bei 20–40 Torr erreicht das Gemisch das eigentliche Spannungsminimum, welches tiefer liegt als das für reines Ne. Dieser Umstand ist gerade für Niederspannungszählrohre günstig. Bei reinen Edelgasen müßte man zur Erreichung des Spannungsminimums nach Abb. 1 und 3 so kleine Drucke einstellen, daß das Zählvermögen für γ -Strahlen zu gering wird. Bei Edelgasmischungen mit Stufenionisation hat man aber im Spannungsminimum durchaus normale Fülldrucke und darum auch normale γ -Ansprechwahrscheinlichkeiten.

Zur Erzielung von Niederspannungszählrohren wird man also die Rohrdimensionen soweit verkleinern, als es der Verwendungszweck erlaubt, und wird Edelgasmischungen mit Stufenionisation zusammen mit elektronischen Lös-

¹⁰⁾ F. Penning, *Philos. Mag.* **11**, 961 (1931).

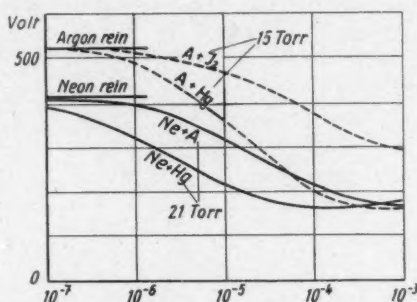


Abb. 2. Zündspannung (Volt) zwischen Plattelektroden in 1 cm Abstand für Argon und Neon mit Beimengungen (A, Hg- und J_2 -Dampf). Abszisse: relativer Partialdruck der Beimengung nach Penning⁹⁾

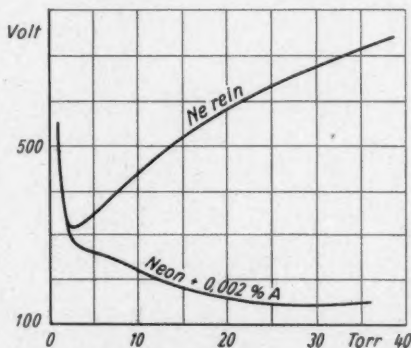


Abb. 3. Zündspannung (Volt) als Funktion des Gasdrucks (Torr) für Neon ohne und mit Argonzusatz nach Penning¹⁰⁾

geräten benutzen; dies ist das Programm der vorliegenden Arbeit. Füllung mit reinem Gas niedrigen Drucks oder Kathoden kleinster Austrittsarbeit geben zwar auch kleine Spannungen, haben aber andere Nachteile.

III. Hilfsschaltungen

a) Röhrenlöschkreis

Die drei Verfahren der Impulslöschung sind erstens die alte Widerstandslöschung, zweitens seit 1937 die Löschung durch Dampfzusatz, drittens etwa gleichzeitig der Röhrenlöschkreis. Da für Niederspannungszählrohre ein Dampfzusatz unzulässig ist, bliebe neben der elektronischen Löschung im Prinzip noch die Widerstandslöschung möglich. Bekanntlich ist aber ihr Auflösungsvermögen zu klein, siehe später Abb. 11; es kommt also nur die elektronische Löschung in Frage.

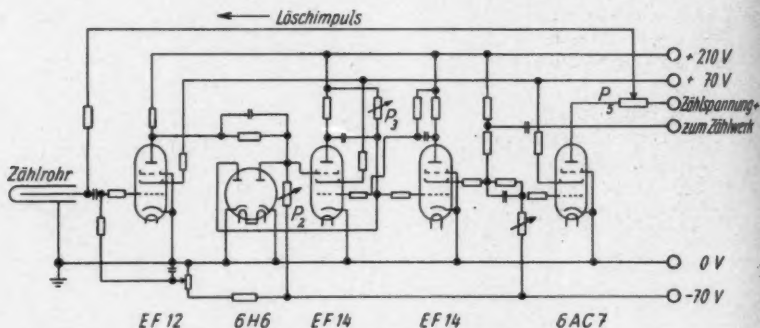


Abb. 4. Der Röhrenlöschkreis

Die hier benutzte Schaltung (Abb. 4) ist zwecks universeller Verwendbarkeit reichlicher ausgebildet, als es für einen Einzelfall allein notwendig wäre, weil hier Zählrohre stark verschiedener Betriebsspannung benutzt werden und weil Löschamplitude und Löszeit in weiten Grenzen variierbar sein müssen.

Links befindet sich eine EF 12 in Widerstandsschaltung als Impulsverstärker, da bei Niederspannungszählrohren der vom Zählrohr kommende negative Impuls nahe der Einsatzspannung nur 1 V und weniger beträgt, so daß er für die sichere Auslösung des Löschimpulses nicht ausreicht. Das Kernstück der Schaltung sind die beiden Multivibratorröhren EF 14. Im Ruhezustand ist das Bremsgitter der linken Multivibratorröhre mit dem Potentiometer P_2 so stark negativ einreguliert, daß diese Röhre gesperrt ist; die rechte Röhre führt vollen Strom. Der vom Vorverstärker (EF 12) auf das Bremsgitter der linken Multivibratorröhre kommende positive Impuls hebt die Sperrung dieser Röhre auf und der Multivibrator vollführt eine einzige Kippung. Vom Schirmgitter der rechten Multivibratorröhre wird der dabei entstehende positive Impuls abgenommen und auf das Steuergitter der in Ruhe gesperrten Endröhre (6AC 7) gegeben. An der Anode dieser Röhre entsteht dann der eigentliche negative Löschimpuls, der über das Potentiometer P_3 zum Zählrohr zurückgeleitet wird und dort die Spannung kurzfristig herabdrückt.

das Schliffrohr der Vakuum-Füllapparatur eingeschoben, wobei sie mit den eingeschmolzenen Spannungszuführungen in Kontakt kamen. Da wegen der begrenzten Edelgasmenigen eine vorherige exakte Gasreinigung zu riskant war, wurde auch auf ein Ausheizen der Elektrodenysteme verzichtet.

Für die endgültigen Messungen wurde als Zählrohr blanker Eisendraht von 0,1 mm Durchmesser verwendet. Als Kathodenzyylinder diente ein Kupferrohr von 4 mm Innendurchmesser, 1 mm Wandstärke und 53 mm Länge. Vor dem Zusammenbau wurde die Ziehhaute des Kupferrohrs mit 15proz. Salpetersäure abgeätzt. Da sich blankes Kupfer — in Übereinstimmung mit Simpson⁸⁾ — ungünstig verhielt, wurde das Kupferrohr durch langsames Erhitzen im Reagenzrohr mit einer gleichmäßigen Oxydhaut bedeckt, die wegen des Sauerstoffmangels, vor-

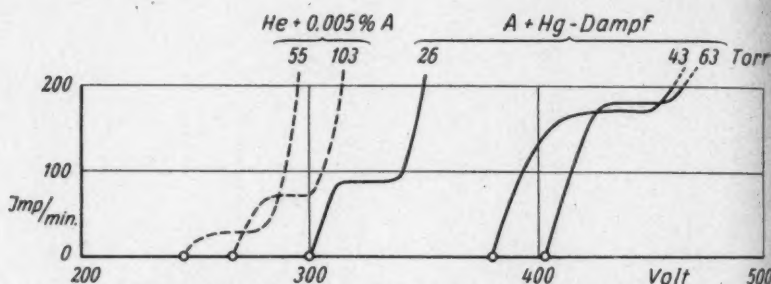


Abb. 7. Zählkurven für zwei Helium- und drei Argonrohre. Abszisse: Betriebsspannung (Volt) Ordinate: Zählimpulse pro Minute bei gleicher γ -Bestrahlung.

wiegend aus Cu_2O bestehen dürfte. Kupfer hat 4,29 eV Austrittsarbeit, Cu_2O dagegen 5,15 eV. Versuche mit oxydiertem Eisen und Aluminium verliefen weniger günstig.

In Abb. 7 ist eine Reihe von Zählkurven mit obigen stets gleichgebauten Zählrohren aufgenommen, die wegen ihrer Kleinheit (siehe Ib) für die Erzielung kleiner Betriebsspannungen günstig waren. In allen Fällen wurde mit demselben schwachen Radiumpräparat in 71 cm Abstand bei Vorfilterung durch 10 mm Pb bestrahlt, so daß die Plateauhöhen zugleich ein ungefähres Maß der Ansprechempfindlichkeit auf γ -Strahlen für die verschiedenen Gasfüllungen darstellen. Ein exaktes Maß liefern diese Zahlen allerdings nicht, da die Kupferkathode zwischen den Messungen manchmal neu abgeätzt und oxydiert wurde. Durch diese Eingriffe wird zwar die genaue Vergleichbarkeit der verschiedenen Einsatzspannungen und Plateauhöhen etwas beeinträchtigt, aber die allgemeine Abhängigkeit von Gasdruck und Gasart wird dadurch nicht völlig verwischt, wie die Messungen zeigten.

b) Argon-Zählrohre

Abb. 7 zeigt rechts drei Zählkurven, wobei das Zählrohr lediglich mit Argon gefüllt war. Das nicht besonders gereinigte Argon dürfte noch einen Rest Stickstoff enthalten haben. Die Ionisierungsenergie von N_2 beträgt nach Tabelle 1 16,1 eV, während metastabiles Argon eine Niveauenergie von nur 11,5 eV hat. Der Stickstoff kann also die Einsatzspannung durch Stufenionisation nicht erniedrigt, sondern als zweiatomiges Gas höchstens erhöht haben. Das Argon enthielt außer-

dem (neben Vakuum-Kittdämpfen) noch den vom Manometer stammenden einatomigen Hg-Dampf vom Sättigungsdruck bei Zimmertemperatur ($\sim 1 \cdot 10^{-3}$ Torr), der wegen seiner Ionisierungsenergie von 10,4 eV zur Stufenionisation in Argon besonders geeignet ist. Bei den drei verwendeten Argondrücken von 63, 43 und 26 Torr bedeutet ein Hg-Dampf von $1 \cdot 10^{-3}$ Torr eine Hg-Beimischung von 1,6, 2,3 und $3,8 \cdot 10^{-3}$ % Partialdruck. Nach Abb. 2 geben solche Hg-Dampfmengen schon eine erhebliche Spannungsminderung, wenn auch das eigentliche Spannungsminimum erst bei 10mal so großen Hg-Dampfdichten erreicht wird. Die Abnahme der Einsatzspannung der Argonrohre mit dem Druck in Abb. 7 ist jedenfalls nicht allein auf die Druckminderung, sondern auch auf die prozentuale Zunahme des Hg-Dampfes zurückzuführen. Da nicht mit Thermostaten gearbeitet wurde, wird eine gewisse Streuung der Meßwerte auch auf die in geringen Grenzen schwankende Zimmertemperatur und Hg-Dampfdichte zurückzuführen sein.

Es sei noch bemerkt, daß alle Rohre nur kurzfristig in Betrieb waren, so daß die Cu_2O -Oberfläche durch Einschließen von Hg-Ionen nicht wesentlich verändert werden konnte; tatsächlich waren die Zählkurven während der Beobachtungszeit gut reproduzierbar.

Neben den Einsatzspannungen ist noch die Form der Plateaus der Argonrohre von Interesse. Abb. 8 zeigt als Beispiel das Rohr mit 43 Torr Argondruck nochmals in größerem Maßstab. Man sieht, daß das Plateau dieses Rohrs (ebenso bei den anderen) ausreichend horizontal ist; die Plateaulängen betragen durchschnittlich 10 % der Betriebsspannung wie bei guten Normalzählrohren. Ebenso sind auch die Nulleffekte normal.

Wegen der gleichbleibenden Bestrahlung entsprechen die Plateauhöhen ungefähr der Ansprechempfindlichkeit auf γ -Strahlen; sie nehmen mit dem Argondruck erwartungsgemäß ab.

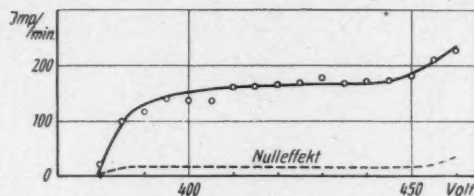


Abb. 8. Zählkurve bei 43 Torr Argon

c) Heliumzählrohre

Mit denselben Elektrodensystemen und Zählrohren wurden ferner Versuche mit Helium als Hauptgas ausgeführt, dem zwecks Stufenionisation Argon in verschiedener Konzentration beigegeben wurde. Die niedrigste Einsatzspannung erhielt man mit 0,005 % Argon-Partialdruck, wobei wiederum $1 \cdot 10^{-3}$ Torr Hg-Dampf anwesend war. Der Reinheitsgrad der geringen zur Verfügung stehenden Helium-Menge war wahrscheinlich gut.

In Abb. 7 sind mit dieser optimalen Füllung von He + 0,005 Druck-%-Argon + Hg zwei Zählkurven eingetragen, die gleichfalls gute Plateaus von ausreichender Länge bei kleinen Nulleffekten besitzen. Die Druckabhängigkeit der Einsatzspannung ist, im Gegensatz zu den Argonrohren, wenig ausgeprägt. Dasselbe galt nach Abb. 3 auch für die Zündspannung eines Ne-A-Gemisches, die anfangs durchaus nicht mit dem Druck wächst.

Da die Intensität der erregenden harten γ -Strahlen bei allen Rohren der Abb. 7 gleich groß war, sieht man beim Vergleich der He- und A-Rohre, daß erstere

in der γ -Ansprechempfindlichkeit trotz höherem Druck unterlegen sind; dafür haben sie den Vorteil der niedrigen Einsatzspannung.

In Abb. 9 sind die Einsatzspannungen der von uns benutzten Gasfüllungen nochmals in Abhängigkeit vom Fülldruck zusammengestellt. Bei der Argon-Hg-Füllung liegt noch eine deutliche Druckabhängigkeit der Einsatzspannung

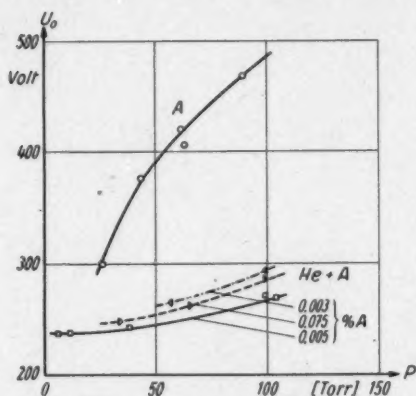


Abb. 9. Einsatzspannungen U_0 (Volt) als Funktion des Fülldrucks p (Torr) für drei Heliummischungen mit verschiedenem Argon-Zusatz und einer Argonfüllung; zusätzlich stets Hg-Dampf!

vor, ähnlich wie sie bei reinem ungemischtem Gas (Abb. 1 und 3) besonders ausgeprägt ist. Die Beimischung an Hg-Dampf ist offenbar für eine ausreichende Stufenionisation noch zu gering. Die He-A-Hg-Mischungen haben dagegen vollentwickelte Stufenionisation; die Druckabhängigkeit ist darum gering. Die kleinste von uns gemessene Einsatzspannung beträgt 238 V und stimmt gut mit der von Simpson⁸⁾ (S. 561) an der gleichen Gasfüllung beobachteten überein, obgleich die Geometrie des Elektrodensystems eine andere war. Auch die Druckabhängigkeit der Einsatzspannung der He-A-Hg-Mischung ist ungefähr die gleiche wie bei Simpson.

d) Glimmlampen als Zählrohre

Nach Penning⁹⁾ sollte eine Neon-Argon-Mischung besonders günstig als Zählrohrfüllung sein; leider stand uns Neon nicht zur Verfügung. Als Ersatz benutzten wir deshalb handelsübliche Glimmröhren geeigneter Form der Firma Pressler, Leipzig.

Daß dieses sogenannten „Neon-Glimmröhren“ bis zu einem gewissen Grade Zähleigenschaften haben, ist gelegentlich schon bemerkt worden; unseres Wissens liegt aber noch keine genauere Untersuchung vor.

Von den verschiedenen Pressleröhren wurden zwei ausgewählt, die in der Geometrie der Elektroden eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Zählrohr hatten: Der Glimmdetektor DT 280 und das Glimmrelais GLG 200. (Abb. 10.)

Der DT 280 besitzt einen äußeren Eisen-Blechzylinder von 24 mm Durchmesser und etwa 30 mm Länge, in dessen Achse zwei gegeneinander versetzte freitragende Wendeln von 1 mm starkem Draht verlaufen. Bei den Messungen diente der Zylinder als Kathode, die beiden miteinander verbundenen Wendeldrähte als Anode. Das Zählen bleibt auch

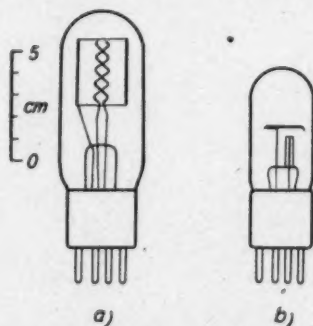


Abb. 10. Der Glimmdetektor DT 280 (a) und das Glimmrelais GLG 200 (b)

Achse zwei gegeneinander versetzte freitragende Wendeln von 1 mm starkem Draht verlaufen. Bei den Messungen diente der Zylinder als Kathode, die beiden miteinander verbundenen Wendeldrähte als Anode. Das Zählen bleibt auch

erhalten, wenn man nur eine Anodenwendel benutzt und die andere unbeschaltet läßt; dagegen ist es ungünstig, der anderen eine feste positive Spannung zu geben.

Beim GLG 200 ist eigentlich die oben liegende Platte Kathode; das Röhrchen von etwa 3 mm Durchmesser und 10 mm Länge dient als „Gitter“, und der in ihm freitragend liegende Zentraldraht von etwa 0,3 mm Durchmesser ist die Anode. Für Zählzwecke bleibt der Teller unbeschaltet, und der Zylinder (Kathode) und der Draht (Anode) wird als Zählrohr benutzt. Das Zählvolumen ist hier also sehr klein (etwa $0,7 \text{ cm}^3$), während der DT 280 etwa 14 cm^3 Zählvolumen besitzt.

Beide Rohrtypen haben den Nachteil, daß der „Zählrohrdraht“ freitragend am Ende des Zählraumes endet, so daß dort eine starke Feldinhomogenität besteht. An diesem Ende wird bei wachsender Spannung der Zähleffekt vermutlich zuerst beginnen und erst später den ganzen Zählraum erfassen, so daß der Anstieg der Charakteristik von der Einsatzspannung zur vollen Plateauhöhe verhältnismäßig langsam erfolgen wird.

Die Rohre sind mit Neon als Hauptgas und Helium und Argon als Beimischung gefüllt. Das Argon wird dabei gemäß der früheren Darlegung als Stufenionisator für das Neon (und das He) dienen, wobei es allerdings fraglich ist, ob die Mischung für unsere Zählrohrzwecke wirklich optimal ist.

Bei Zählrohrbetrieb erwiesen sich beide Rohre als sehr lichtempfindlich, so daß ein Arbeiten nur mit schwarzlackiertem Glaskolben bzw. bei lichtdichtem Abschluß möglich ist. Eigentlich deutet dies auf niedrige Elektronenaustrittsarbeit an der Kathode, was nach dem früheren die Zählfunktion verschlechtern sollte. Trotzdem gelang bei beiden Rohren ein einwandfreier Zählbetrieb. Es bestand lediglich eine gewisse Empfindlichkeit gegen Plateauüberschreitungen, die für längere Zeit einen gesteigerten Null-effekt, also Spontanentladungen hervorrufen; ähnliches zeigen aber auch alle Normalzählrohre.

Bei den ersten Versuchen wurden die Rohre mit der alten Methode der reinen Widerstandslöschung von Geiger-Müller betrieben, wobei sich die Zählkurve Abb. 11 ergab. Hierbei waren sehr hohe äußere Ableitwiderstände von $1 - 3 \cdot 10^9 \Omega$ erforderlich, die nicht mehr klein sind gegen den inneren Widerstand der Isolation von Rohr und Sockel. Unter diesen Umständen hängt nicht nur die Plateaulänge (das liegt in der Natur der Löschmethode) sondern auch die Einsatzspannung vom gesamten Ableitwiderstand ab, der sich aus äußerem und innerem Widerstand zusammensetzt. Da der innere Isolationswiderstand von der Luftfeuchte abhängt, gilt das gleiche auch von der Einsatzspannung. Der Isolationsverluststrom erzeugt einen Spannungsabfall am Ableitwiderstand; daher liegt die wahre Einsatzspannung sicher tiefer als 180 Volt nach Abb. 11. Außerdem ist das Löschvermögen der Widerstandsschaltung offenbar ungenügend, denn die Plateaus sind zwar ausreichend lang, aber sehr schräg, was auf eine Neigung zu Nachzündungen hindeutet.

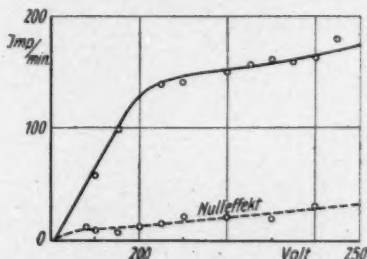


Abb. 11. Zählkurve von DT 280 mit Widerstandslöschung

Schließlich ist die Widerstands Löschung auch deshalb unbrauchbar, weil die Totzeit des Zählrohrs zu groß ist. Mit einer Eigenkapazität des Zählrohrs von $C \sim 10$ pF und einem Ableitwiderstand $R = 3 \cdot 10^9 \Omega$ wird die Zeitkonstante $T = RC = 0,06$ sec. Nach einem Impuls vergehen also mehr als 0,1 sec Totzeit, bevor das Rohr wieder zählfähig ist.

Diese Beobachtungen zeigen, daß man Niederspannungszählrohre, die keinen selbstlöschenden Dampfzusatz enthalten, in der Tat nur mit Röhrenlöschkreis betreiben kann. Mit diesem Löschverfahren wurden nun an verschiedenen Exemplaren der DT 280 die Zählkurven aufgenommen, die praktisch alle den gleichen

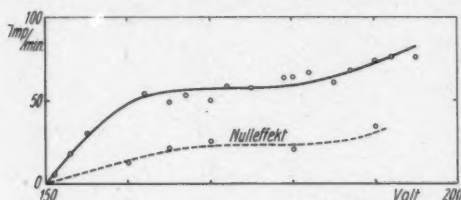


Abb. 12. Zählkurve von DT 280 mit Röhrenlöschkreis bei schwacher Erregung mit γ -Strahlen

Verlauf zeigten. Abb. 12 gibt eine Zählkurve bei schwacher γ -Strahlung (Ra hinter 11 cm Pb). Die Einsatzspannung liegt bei nur 150 Volt. Der Anstieg zur vollen Plateauhöhe erfolgt verhältnismäßig langsam, z. T. wegen der schon erwähnten starken Feldinhomogenität an den freistehenden Drahtspitzen, z. T. auch weil nahe der Einsatz-

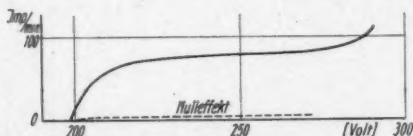


Abb. 13. Zählkurve von GLG 200 mit Röhrenlöschkreis

spannung die vom Zählrohr kommenden Impulse recht schwach sind, so daß der Löschkreis dort wahrscheinlich nicht sicher anspricht. Das Plateau selbst hat eine Länge von ungefähr 10 % der Betriebsspannung und ist befriedigend horizontal. Der Nulleffekt beträgt 23 Impulse/min, was bei einer Projektionsfläche des Zählvolumens von $2,4 \cdot 3,0 = 7,2$ cm² etwa 3 Impulse/min für einen horizontalen cm² bedeutet; dieser Wert erscheint etwas hoch. Davon abgesehen, zeigte der DT 280 gute Zähleigenschaften. Zum Beispiel wurde der Abstand des Ra-Präparates von $a = 0,7$ bis 3,6 Meter variiert, wobei sich eine gute Proportionalität der Impulszahlen mit a^{-2} ergab.

Mit dem Röhrenlöschkreis wurde auch das GLG 200 durchgemessen. Dabei wurden die Löschamplitude des Kreises mit 93 Volt bei der Einsatzspannung und die Löschzeit mit $2,3 \cdot 10^{-3}$ sec sehr reichlich gewählt. Abb. 13 zeigt die Zählkurve des GLG 200. Der Nulleffekt beträgt 3–4 Impulse/min bei einer Projektionsfläche des Zählvolumens von $0,3 \cdot 1 = 0,3$ cm², entsprechend etwa 10 Impulse/min für einen horizontalen cm², was entschieden zu groß ist. Wahrscheinlich sind Spontantladungen infolge kleiner Elektronenaustrittsarbeit der Kathode schuld, vergleiche die vorerwähnte große Lichtempfindlichkeit der Rohre. Ferner zeigt sich wieder der recht langsame Anstieg von der Einsatzspannung zur vollen Plateauhöhe, wofür dieselben Gründe wie bei dem DT 280 gelten. Davon abgesehen sind die Zähleigenschaften des Rohres ausgesprochen gut. Die Plateaulänge beträgt volle 20 % der Betriebsspannung, eine Plateauneigung fehlt fast vollkommen. Nulleffekt und Zählkurve waren bemerkenswert konstant und reproduzierbar; die Einsatzspannung liegt bei $U_0 = 197$ Volt.

e) Sonderzählrohre mit Ne-He-A-Füllung

Auf Grund der ermutigenden Erfolge mit den Glimmröhren der Firma Pressler, Leipzig, bestand der Wunsch, Röhre mit der gleichen Gasfüllung zu untersuchen, deren Elektroden von vornherein der üblichen Zählrohrform entsprachen. Da uns Neon nicht zur Verfügung stand, stellte die Firma Pressler für uns eine Anzahl Sonderzählrohre her, die in ihren Abmessungen den normalen Zählrohren von 15 mm Kathodendurchmesser (Silber auf Glaswand) und 0,2 mm Zähldrahtdurchmesser entsprachen, die aber statt der normalen Argon-Alkoholdampf-Füllung eine Ne-He-A-Füllung wie die vorher besprochenen Neonglimmröhren erhielten. Im ganzen standen insgesamt 16 Röhre mit 20, 40 und 80 Torr Gesamtdruck zur Verfügung, die alle schwach lichtempfindlich waren.

Leider führten diese Versuche noch nicht zu einem vollen Erfolg, da die Plateaus bezüglich Länge und Neigung nicht gut waren. Auch bestand eine große Empfindlichkeit gegen Plateauüberschreitungen, wie sie in geringerem Maße auch bei den Normal-Zählrohren und den vorher untersuchten Neon-Glimmröhren vorliegt. Während sich aber bei den beiden letzteren die alte Zählkurve nach einiger Zeit wieder herstellte, zeigten die Sonderrohre auch nach einer Reihe von Tagen keine Wiederholung, was wohl vom Kathodenmaterial herrührt. Wir sehen deshalb von einer Wiedergabe der Zählkurven dieser Sonderzählrohre ab; die Versuche sollen mit Unterstützung der Firma Pressler, Leipzig, weitergeführt werden.

Wir beschränken uns deshalb darauf, in Abb. 14 die Einsatzspannungen von je 2 Röhren bei 80, 40 und 20 Torr wiederzugeben.

Man sieht, in Übereinstimmung mit Abb. 3 und 9, daß die Druckabhängigkeit wenig ausgeprägt ist und daß das Minimum der Einsatzspannung bei relativ hohen Drucken liegt, nämlich bei 40–50 Torr, während bei reinen ungemischten Gasen das Minimum ungünstigerweise bereits bei einigen Torr Druck eintritt. Diese Tatsache ist ein weiteres Beispiel für das vorteilhafte Verhalten von Edelgasmischungen für Niederdruckzählrohre mit Stufenionisation. Man muß bedenken, daß es sich hier bezüglich der Elektrodensysteme um Normalzählrohre handelt, die mit der üblichen Argon-Alkoholdampf-Füllung etwa 1500 Volt Spannung benötigen. Lediglich durch Benutzung einer anderen Gasfüllung sinkt die Spannung bei den gleichen Röhren auf weniger als den achten Teil ab.

V. Zusammenfassung

Im Abschnitt II wurde dargelegt, daß zur Abänderung der Normalzählrohre vier Variablen zur Verfügung stehen: Elektrodenmaterial, Elektrodenform, Gasdruck, Gasart. Zur Erzielung von Niederspannungszählrohren wird man bezüglich der Elektrodenform eine Verkleinerung der Abmessungen anstreben, und bezüglich der Gasart Edelgasmischungen mit Stufenionisation verwenden. Durch solche Gasmischungen wird die Spannung im Vergleich zu Normalzählrohren mit Alkoholdampf um knapp eine Größenordnung herabgesetzt.

Im Abschnitt III wird außer dem Zählkreis vor allem der Röhrenlöschkreis beschrieben, der für Niederspannungszählrohre unentbehrlich ist.

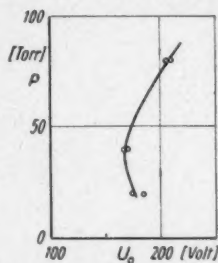


Abb. 14. Einsatzspannungen U_0 [Volt] der Sonderzählrohre mit He-Ne-A-Füllung in Abhängigkeit vom Druck p [Torr]

Im Abschnitt IV werden die experimentellen Ergebnisse besprochen, zunächst Zählrohre mit Argon + Hg, zweitens Zählrohre mit He + A + Hg, drittens Neon-Glimmröhren in Zählrohrschaltung, welche Einsatzspannungen von nur 150 Volt haben, viertens Versuchsrohre mit Ne + He + A.

Wir danken zum Schluß Herrn Dr. Richter sowie seiner Firma, der Deutschen Glimmlampengesellschaft Pressler u. Co. Leipzig, für die Sonderanfertigung einiger Versuchsrohre.

Rostock, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 20. August 1952.)

Elektroneninterferenzen an Bleijodid bei Durchstrahlung im konvergenten Bündel

Von *Hans Pfister*

(Mit 37 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

I. PbJ_2 , das sich infolge der hohen Ordnungszahl von Pb und J durch starke dynamische Wirkungen bei der Elektronenbeugung auszeichnet, wird im konvergenten Bündel durchstrahlt. Die Intensität der stärksten Bänder (1210), (2021) und (1231) wird bei Kristallen verschiedener Dicke gemessen und den von Artmann und Fues-Riedel errechneten Intensitäten gegenübergestellt. Man findet bei dünnen Kristallen qualitative Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen. Ein quantitativer Vergleich zeigt, daß die beobachteten Bandintensitäten durchweg kleiner sind als die errechneten.

Die Abnahme der Bandintensität und der schließliche Umschlag zu dunklen Bändern bei zunehmender Kristalldicke läßt sich auf Verschiedenheit der Absorption zu beiden Seiten der Interferenzrichtung zurückführen. Bei der Abhängigkeit der Bandintensität von der Richtung gegen den Primärstrahl muß man augenscheinlich dieselben Vorgänge im Spiel sehen.

II. Eine von I. Ackermann an PbJ_2 gefundene Ausfallerscheinung wird in weiteren Fällen beobachtet und an Hand der Phasenbeziehungen zwischen den beteiligten Wellen verständlich gemacht (Kap. A). In Kap. B werden Reflexe erwähnt, die sich nach der gewohnten Vorstellung nicht ohne weiteres verstehen lassen. In Kap. C wird auf interessante Kopplungserscheinungen hingewiesen.

I. Die Intensität der Kikuchi-Bänder

A. Einleitung

S. Kikuchi¹⁾ fand bei der Durchstrahlung von Glimmerblättchen von etwa 1000 Å Dicke die nach ihm benannten Linien, deren Lage durch die Schnitte der Interferenzkegel mit der Aufnahmeplatte gegeben ist. Um die Elementarvorgänge bei der Elektronenbeugung zu erfassen, haben Kossel und Möllenstedt²⁾ den Kristall mit einem konvergenten Elektronenbündel durchstrahlt. Das System der Kikuchi-Linien ist hier besonders deutlich ausgebildet und tritt auch bei Kristallen auf, die so dünn sind, daß sie im Parallelstrahl nur Laue-Punkte zeigen. Der Bereich zwischen den beiden Kikuchi-Linien, die einer dicht besetzten Netzebene zugeordnet sind, zeigt im allgemeinen eine gegenüber der Um-

¹⁾ S. Kikuchi, *Naturwiss* 17, 175 (1925).

²⁾ W. Kossel u. G. Möllenstedt, *Ann. Physik* (5) 36, 113 (1939).

gebung verschiedene Intensität. Gewöhnlich findet man zwischen den beiden Linien höhere Intensität als außerhalb. Bei dickeren Kristallen beobachtet man aber auch das Umgekehrte. Diese Intensitätsdifferenz im Untergrund — man spricht von Kikuchi-Bändern — wurde quantitativ verfolgt.

B. Versuchstechnik

1. Apparatur

Die Untersuchungen sind mit der von W. Kossel und G. Möllenstedt²⁾ entwickelten Technik der Durchstrahlung im konvergenten Bündel durchgeführt worden. Um zu gewährleisten, daß nur ein einheitlich aufgebauter Kristallbereich arbeitet, wurde der Elektronenstrahl durch zweistufige Abbildung als feine Sonde von etwa 1μ Durchmesser durch den Kristall geführt³⁾. Die Apertur des Primärkegels war etwa $1/40$, der Abstand Kristall — photographische Platte 310 mm. Die Strahlspannungen lagen zwischen 45 und 55 kV.

2. Zur Ermittlung der Intensität aus der Plattenschwärzung

Zur Bestimmung der Intensität aus der Schwärzung der photographischen Platte diente ein Verfahren von Dorgelo⁴⁾ in der Art, wie es von H. Hinz⁵⁾ angewandt wurde. Es wurden unter unveränderten Bedingungen direkt aufeinander folgend die Hälften einer Platte verschieden lang exponiert. Die Belichtung erfolgte durch eine von einem Synchronmotor angetriebene Belichtungsuhr. Für Elektronenstrahlen ist der Schwarzschild-Exponent eins, und damit das Intensitätsverhältnis für die Schwärzungen von entsprechenden Punkten der beiden Aufnahmen gleich dem Verhältnis der Belichtungszeiten. Wenn die beiden Aufnahmen für ein und denselben Schnitt durchphotometriert werden, so läßt sich über die Schwärzung einander entsprechender Punkte die Schwärzungskurve $S = f(\log J)$ zeichnen.

3. Herstellung der Kristalle

PbJ_2 hat unter den zu Interferenzuntersuchungen besonders geeigneten Schichtgittern AB_2 die höchsten Ordnungszahlen und interessiert deshalb ganz besonders: Wir haben hier ein Material von hohem Streuvermögen mit stark dynamischem Verhalten.

Die zur Durchstrahlung erforderlichen Kristalle von größenordnungsmäßig 1000 Å Dicke wurden in der von I. Ackermann angegebenen Weise hergestellt⁶⁾. Werden stark verdünnte KJ- und $Pb(NO_3)_2$ -Lösungen zusammengeschüttet, so fallen beim Verdunsten im Verlauf mehrerer Stunden Kristalle der gewünschten Dicke in einer Größe von einigen Zehntelmillimetern im Quadrat aus.

Bei der Durchstrahlung solch kleiner Präparate werden an die Elektronensonde große Anforderungen gestellt. Man war deshalb bestrebt, Kristalle von größerer seitlicher Ausdehnung zu züchten. Durch Zusatz von Patentblau V — einem Triphenylmethanfarbstoff — zur Lösung gelang es, Kristalle herzustellen, die bei einheitlicher Dicke von etwa 600 Å seitliche Ausdehnungen bis zu 5 mm erreichten. Das günstigste Gewichtsverhältnis von Patentblau V zu PbJ_2 ist etwa $1:10^4$.

²⁾ G. Möllenstedt u. I. Ackermann, Naturwiss. 29, 647 (1941).

³⁾ H. B. Dorgelo, Physik. Z. 26, 756 (1925).

⁴⁾ H. Hinz, Ann. Physik (5) 39, 573 (1941).

⁵⁾ J. Ackermann, Ann. Physik (6) 2, 19 (1948).

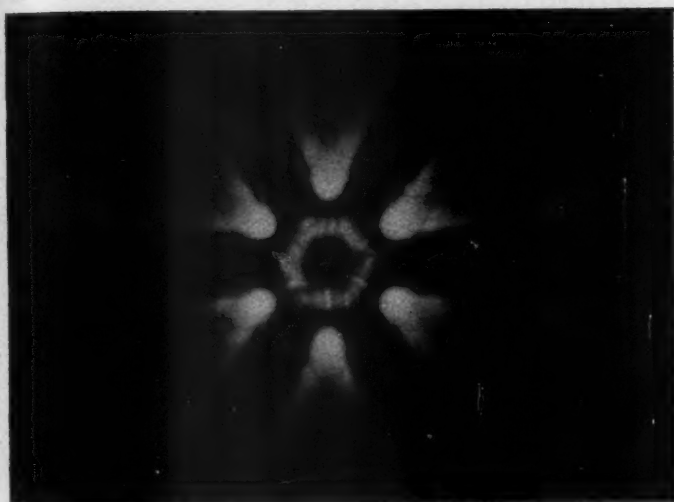


Abb. 2. Bleijodid im konvergenten Elektronenbündel, senkrechte Einstrahlung. Kristalldicke ~ 2000 Å. Strahlenspannung 48 kV

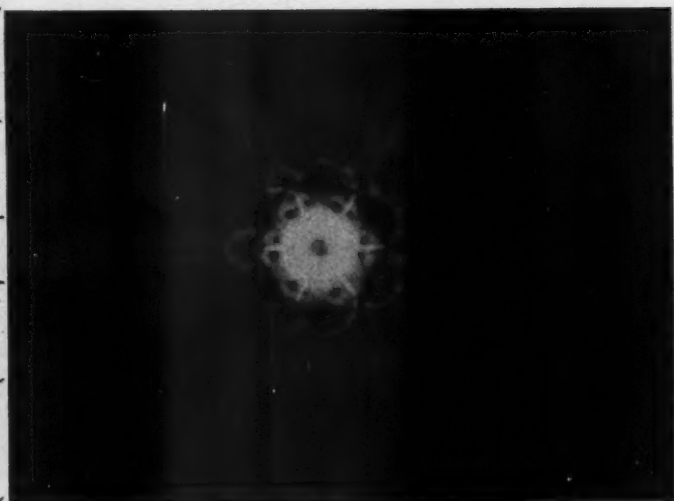


Abb. 1. Bleijodid im konvergenten Elektronenbündel, senkrechte Einstrahlung. Kristalldicke ~ 700 Å. Strahlenspannung 62 kV

(13300)

(1210)

(0330)

Der Farbstoff Patentblau V verzögert das Dickerwerden der Kristalle. Dabei wird in vielen Fällen beobachtet, daß die Wachstumsgeschwindigkeit des Kristalls senkrecht zur Spaltfläche, der (0001)-Fläche, nicht nur herabgesetzt ist, sondern daß der Kristall in dieser Richtung überhaupt nicht mehr weiterwächst. Die Kristalle können über Tage hinweg bei fortwährendem Wachstum nach der Seite dieselbe Interferenzfarbe, d. h. dieselbe Dicke beibehalten. Durch die Fremdstoffbeeinflussung wächst der Kristall praktisch nur noch in zwei Dimensionen.

Mit diesen größeren Kristallen läßt sich natürlich bequemer arbeiten. Außerdem scheint der Kristallaufbau weniger fehlerhaft zu sein, denn das Interferenzbild zeigt noch Einzelheiten — z. B. die Strukturen in den Reflexscheiben der Abb. 36 —, die sonst nicht mehr zu erkennen sind.

C. Ergebnisse

Zur Einführung zeigen wir in Abb. 1 eine Aufnahme bei senkrechter Durchstrahlung eines dünnen Präparates. Das Kikuchi-System läßt sich nach der bekannten Kristallstruktur von Bleijodid⁷⁾ indizieren (s. Netzebenenschema in Abb. 24). Man sieht deutlich, daß die Kikuchi-Bänder stärker mit Intensität erfüllt sind als die Umgebung. Bei dickeren Kristallen ist umgekehrt im Bandinnern weniger Intensität als außerhalb (Abb. 2).

In der Fülle der sich gegenseitig durchkreuzenden Bänder ist es nicht ganz einfach, eine Stelle zu finden, die frei von Störbändern ist. In befriedigender Weise ist dies nur für die schmalen Bänder ($1\bar{2}\bar{3}1$), ($20\bar{2}1$) und ($1\bar{2}\bar{3}1$) gelungen. Diese Bänder sind aber verhältnismäßig stark ausgebildet — sie sind den dichtest besetzten Netzebenen zugeordnet — und interessieren deshalb besonders.

Die erwähnten Bänder sind, bei jeweils symmetrischer Einstrahlung, senkrecht zur Bandkante durchphotometriert worden. Wir geben in Abb. 3 die Photometerkurven, in Abb. 4 den daraus ermittelten Intensitätsverlauf quer zur Bandrichtung.

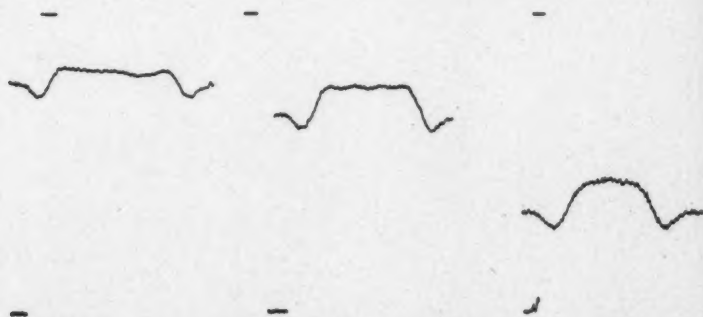


Abb. 3. Photometerkurven der ($1\bar{2}\bar{3}1$)^{a)}, ($20\bar{2}1$)- und ($1\bar{2}\bar{3}1$)-Bänder, 2,3fach verkleinert (Vollauschlag: 10,2 cm). Photometerübersetzung: 4fach. Präparatdicke ~ 500 ÅE. Strahlenspannung 48 kV

⁷⁾ Strukturbericht I (1913–1928); in: Z. Kristallogr. (Erg.-Bd.) 193 (1931).

^{a)} Die Einsenkung in der rechten Bandhälfte der Photometerkurve von ($1\bar{2}\bar{3}1$) rührt von einem Störreflex her. Der Intensitätsverlauf in Abb. 4 ist deshalb dort symmetrisch zur linken Bandhälfte gezeichnet.

Die Intensität des Streuuntergrundes ist hier und im folgenden stets gleich eins gesetzt worden.

Man findet in den wiedergegebenen Bändern ganz verschiedene Intensitätsverteilungen. Das $(1\bar{2}10)$ -Band hat in der Mitte, wo das $(12\bar{3}1)$ -Band eine Einsattelung der Intensität aufweist, ein stark überhöhtes Intensitätsmaximum. Das $(20\bar{2}1)$ -Band stellt einen Übergang zwischen $(1\bar{2}10)$ und $(12\bar{3}1)$ dar.

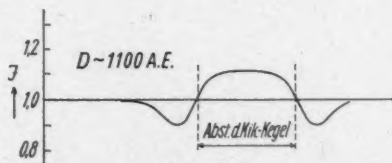
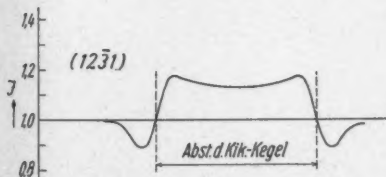
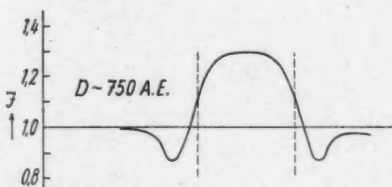
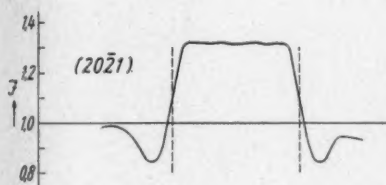
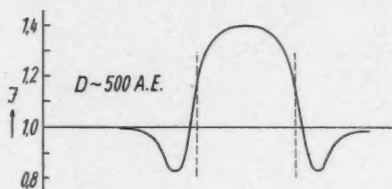
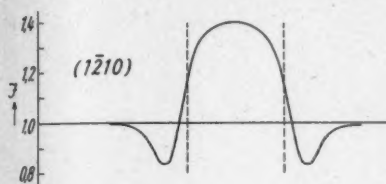


Abb. 4. Intensitätsverlauf in den $(1\bar{2}10)$ -, $(20\bar{2}1)$ - und $(12\bar{3}1)$ -Bändern bei einer Kristalldicke von ~ 500 ÅE. Die Intensität des Streuuntergrundes ist jeweils gleich eins. Strahlspannung 48 kV

Abb. 5. Intensitätsverlauf im $(1\bar{2}10)$ -Band bei verschiedenen Präparatdicken D. Strahlspannung 48 kV

Beobachtungen an verschieden dicken Kristallen zeigen, daß die relative Bandintensität, d. h. der relative Intensitätsüberschuß über den Streuuntergrund, sich mit der Dicke sehr stark verändert^{*)}. Man sieht in Abb. 5 an dem $(1\bar{2}10)$ -Band, daß die Bandintensität bei zunehmender Kristalldicke stetig abnimmt. Schließlich ist das Band mit weniger Intensität erfüllt als der Streuuntergrund, man beobachtet die dunklen Bänder der Abb. 6. Dabei bleibt die spezifische Bandstruktur, der Charakter des Intensitätsverlaufs über die Breite des Bandes erhalten. Durch Spiegelung der Intensitätskurve der dunklen Bänder an der Ge-

^{*)} Die Präparatdicke wurde aus dem Abstand der Interferenzstreifen bestimmt²⁾.

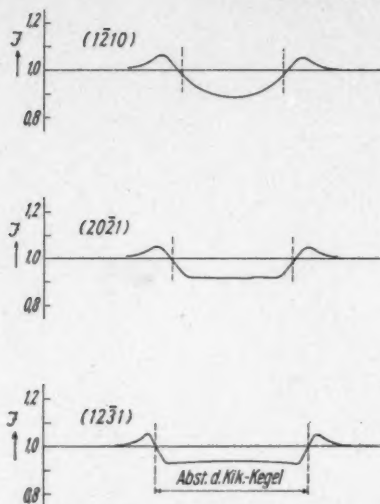


Abb. 6. Intensitätsverlauf in den $(1\bar{2}10)$ -, $(20\bar{2}1)$ - und $(12\bar{3}1)$ -Bändern bei dicken Kristallen. Präparatdicke ~ 2000 ÅE. Strahlspannung 48 kV

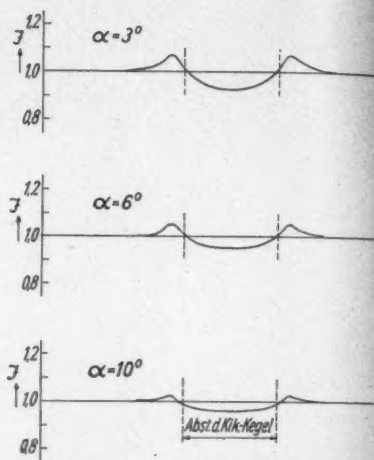


Abb. 7. Abhängigkeit der Intensität des $(1\bar{2}10)$ -Bandes von der Winkelabweichung gegen die Primärstrahlrichtung. Präparatdicke ~ 1700 ÅE. Strahlspannung 45 kV

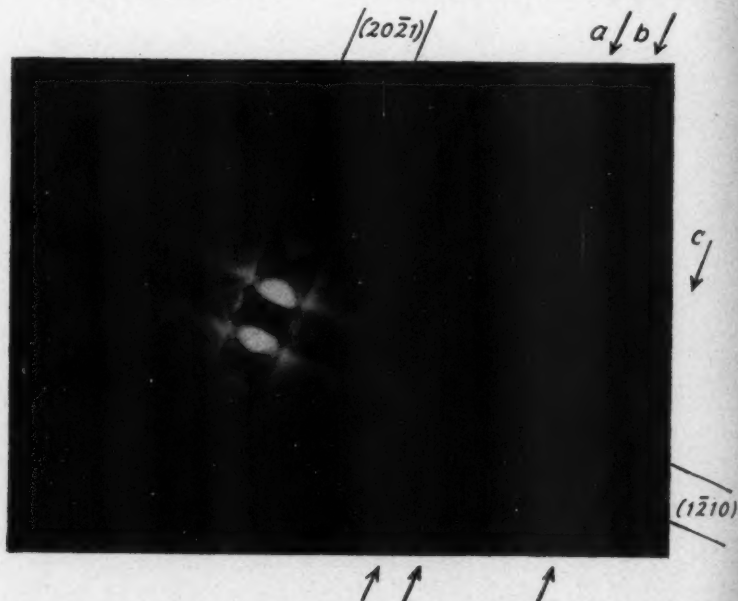


Abb. 8. Änderung der Bandintensität mit der Entfernung vom Primärfleck. Dicke ~ 1500 ÅE. Strahlspannung 48 kV

raden, die der Intensität des Streuuntergrundes entspricht, erhält man qualitativ wieder das Bild, wie es bei dünnen Kristallen beobachtet wird.

Außer der Abhängigkeit der relativen Bandintensität von der Präparatdicke zeigt sich, besonders bei dickeren Kristallen, auch eine Abhängigkeit von der Ab-

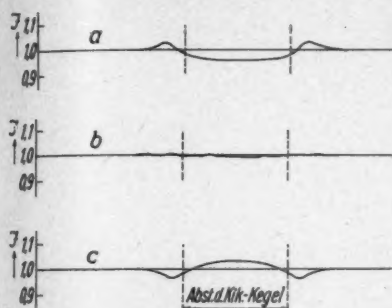


Abb. 9. Intensität im $(1\bar{2}10)$ -Band der Aufnahme Abb. 8 in den durch die Pfeile *a*, *b* und *c* gekennzeichneten Entfernungen vom Primärfleck

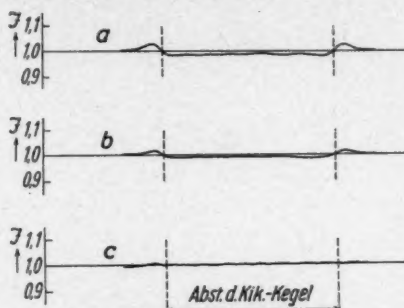


Abb. 10. Verschwinden der Bandintensität von $(12\bar{3}1)$ beim Übergang vom dunklen zum hellen Band. Präparatdicke ~ 1500 ÅE. Strahlspannung 48 kV

weichung gegen die Primärstrahlrichtung, und zwar von der Art, daß die relative Bandintensität mit der Entfernung vom Primärfleck zunimmt. So hat in Abb. 7

das $(1\bar{2}10)$ -Band in der Nähe des Primärflecks weniger Intensität als in größerer Entfernung. Bei entsprechend gewählter Präparatdicke läßt sich auf derselben Platte der Umschlag ein und desselben Bandes von hell zu dunkel beobachten. Abb. 9 gibt die Intensität des $(1\bar{2}10)$ -Bandes der Aufnahme Abb. 8 in verschiedenen Entfernungen vom Primärfleck wieder. Die Übergangsstelle vom hellen zum dunklen Band, die besonders interessiert, ist in der Intensitätskurve *b* festgehalten.

Das Verschwinden der Bandintensität ist in Abb. 10 am $(12\bar{3}1)$ -Band schrittweise zu verfolgen. In der Intensitätskurve *c* haben wir im Bandinnern dieselbe Intensität wie außerhalb, und bemerkenswerterweise heben sich auch die Bandkanten, die beiden Kikuchi-Linien, nicht mehr von dem Untergrund ab. Abb. 11 zeigt die Photometerkurve für diesen Grenzfall *c*.

Abb. 11. Photometerkurve zur Intensitätskurve *c* (Vollausschlag 10,2 cm) der Abb. 10

D. Zur Theorie der Kikuchi-Bänder

Zur Theorie der Kikuchi-Bänder liegen Arbeiten von Artmann¹⁰⁾ und Fues-Riedel¹¹⁾ vor. Nach Artmann werden flach auf eine dicht besetzte

¹⁰⁾ K. Artmann, Z. Physik **124**, 80 (1947); **125**, 225, 298 (1949); **126**, 533 (1949).

¹¹⁾ E. Fues u. H. Riedel, Ann. Physik (6) **6**, 105 (1949).

¹²⁾ H. Riedel, Diss. Stuttgart 1949.

Netzebene einfallende Elektronen diese nicht mehr ungestört durchsetzen, sie bleiben vielmehr in der Potentialmulde der Netzebene stecken, sie sind dort gebunden und geben eine erhöhte Intensität im Bandinnern. Fues dagegen deutet die Bandintensität, d. h. den Intensitätsüberschuß über den Streuuntergrund, als Überlagerung der Intensitäten der beiden begrenzenden Kikuchi-Linien. Die Autoren gehen dabei von ganz verschiedenen Voraussetzungen aus. Artmann denkt an Netzebenen mit besonders großem Gitterpotential, wahren sich die Fues-Riedelschen Rechnungen auf Netzebenen geringen Potentials beschränken. Da wir die beobachteten Bandintensitäten mit den berechneten vergleichen wollen, sollen die Grundgedanken und Ergebnisse der Fues-Riedelschen und Artmannschen Rechnungen kurz zusammengestellt werden.

Die starke Abhängigkeit der wirklichen Bandintensität von der Präparatdicke wird von diesen Arbeiten allerdings nicht erfaßt.

1. Die Fues-Riedelsche Theorie

Fues-Riedel berechnen die Bandintensität nach der dynamischen Theorie¹³⁾¹⁴⁾ mit Hilfe des Reziprozitätssatzes von Laue¹⁵⁾. Nach dem Reziprozitätssatz hat, bei Einstrahlung von einem Punkt P außerhalb des Kristalls, die Welle am Ort eines Kristallatoms dieselbe Intensität, wie im umgekehrten Fall, wenn dieses Kristallatom Strahlungsquelle ist, die Welle im Punkt P . Wenn man nach der dynamischen Theorie für eine aus der Richtung \mathfrak{R}_0 einfallende Strahlung die Intensität am Ort eines Atoms berechnet hat, so kennt man auch die Intensität, die dieses Atom in der reziproken Einfallsrichtung $-\mathfrak{R}_0$ ausstrahlt und durch Summation über alle Kristallatome erhält man die gesamte vom Kristall ausgehende Streustrahlung.

Wird eine Elektronenwelle mit dem Wellenvektor \mathfrak{R}_0 in den Kristall eingestrahlt, so bilden sich aus ihr unendlich viele Beugungswellen, deren Wellenvektoren

$$\mathfrak{R}_m = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{B}_m$$

sind, wo $\mathfrak{B}_m = 2\pi \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{b}_m = m_1 \mathfrak{b}_1 + m_2 \mathfrak{b}_2 + m_3 \mathfrak{b}_3$ ein Vektor des reziproken Gitters. Die Integration der Schrödinger-Gleichung für das dreifach periodische Kristallpotential führt zu den Grundgleichungen der dynamischen Theorie, einem System von unendlich vielen homogenen Gleichungen, die mathematisch nicht geschlossen ausgewertet werden können.

Fues-Riedel beschränken sich auf die Wellen mit starker Amplitude, also auf Beugungswellen, deren Wellenzahlen ungefähr gleich der der einfallenden Welle sind. Für ein Kikuchi-Linienpaar — es möge durch die Vektoren $\mathfrak{B}(m_1, m_2, m_3)$ und $-\mathfrak{B}(m_1, m_2, m_3)$ festgelegt sein — existieren in seiner Umgebung, wenn es nicht von einer weiteren Linie geschnitten wird, nur drei starke Wellen, die anregende Welle \mathfrak{R}_0 und die beiden Beugungswellen

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{B}.$$

Die Grundgleichungen der dynamischen Theorie reduzieren sich auf drei Gleichungen, und zur Konstruktion der Fuesschen Ausbreitungsfläche¹⁴⁾ sind nur drei Ausbreitungskugeln zu berücksichtigen. Ja, wenn sich die Ausbreitungs-

¹³⁾ H. Betho, Ann. Physik (4) 87, 55 (1928).

¹⁴⁾ E. Fues, Ann. Physik (5) 36, 209 (1939); Z. Physik 109, 14, 236 (1938).

¹⁵⁾ M. v. Laue, Ann. Physik (5) 23, 741 (1935).

fläche jeweils nur zwei Kugeln nähert, ist einer der drei Strahlen gegenüber den beiden anderen als schwach anzusehen. Nach Fues-Riedel kann für

$$\frac{U_{\mathfrak{B}}}{V_{\mathfrak{B}}} \leq \frac{1}{10} \quad (1)$$

im Gebiet I der Strahl \mathfrak{R}_1 bzw. im Gebiet II der Strahl \mathfrak{R}_2 vernachlässigt werden (Abb. 12). Dabei ist $U = -e\Phi_{\mathfrak{B}}$ und $\Phi_{\mathfrak{B}}$ der Fourierkoeffizient des Kristallpotentials für die Netzebene \mathfrak{B} und

$$V_{\mathfrak{B}} = \frac{\hbar^2}{2m} \mathfrak{B}^2,$$

wobei m die Masse des Elektrons und $\mathfrak{B} = 2\pi \mathfrak{b}$ der Vektor im 2π -fach vergrößerten reziproken Gitter ist, der die reflektierende Netzebene definiert.

Der Zweistrahlfall ist also nur gegeben, wenn der Fourierkoeffizient Φ und der Netzebenenabstand $d = \frac{2\pi}{|\mathfrak{B}|}$ klein ist, und auf solche Netzebenen beschränkt sich die Fues-Riedelsche Theorie. Für die Mitte des Bandes, im Gebiet 0 ist allerdings mit drei Strahlen zu rechnen. Es zeigt sich aber, daß die Bandintensität in der Mitte einfach die additive Überlagerung der Intensitäten darstellt, die man aus dem Zweistrahlfall der Wellen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_1 einerseits und dem der Wellen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_2 andererseits erhält. Die Bandintensität ist in erster Näherung nichts weiter als die Überlagerung der Intensitäten der beiden Kikuchi-Linien. Die ungerade Intensitätsverteilung der Kikuchi-Linien mit verstärkter Ausstrahlung im Bandinnern und verminderter Strahlung außerhalb des Bandes ergibt eine Intensitätsstufe, das Band.

Bei symmetrischem Anschuß ist nach Fues-Riedel die Intensität des Kikuchi-Bandes, wenn die Intensität des Streuuntergrundes gleich eins gesetzt wird,

$$J = \left(\frac{\beta_1}{1 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2}{1 + \beta_2^2} \right) \cdot \frac{1}{Q} \sum_q \cos \mathfrak{B} \mathbf{r}_q \quad (2)$$

$$\text{mit } \beta_1 = \frac{V_{\mathfrak{B}}}{U_{\mathfrak{B}}} \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \beta_2 = \frac{V_{\mathfrak{B}}}{U_{\mathfrak{B}}} \frac{\alpha_2}{\alpha_0},$$

wobei α_1 bzw. α_2 die Winkelabweichung von den beiden Kikuchi-Kegeln und α_0 die Bandbreite ist. Der Faktor $\frac{1}{Q} \sum_q \cos \mathfrak{B} \mathbf{r}_q$ — wo Q die Anzahl der Basisatome q — ist gleich eins, wenn alle Atome in der spiegelnden Netzebene liegen, sonst kleiner als eins.

Die Fues-Riedelschen Bänder zeigen eine Einsattlung in der Bandmitte, die um so stärker, je kleiner das Verhältnis $\frac{U_{\mathfrak{B}}}{V_{\mathfrak{B}}}$, d. h. je kleiner der Fourierkoeffizient bzw. der Netzebenenabstand ist (vgl. Abb. 14, 15).

Wird das Band vom Primärstrahl nicht symmetrisch angeschossen, so zeigt es, als Folge der in verschiedenen Richtungen verschieden starken Streustrahlung,

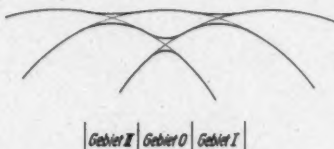


Abb. 12. Ausbreitungsfläche in der Umgebung des Kikuchi-Bandes. (Nach H. Riedel¹¹⁾)

einen für die Bandmitte unsymmetrischen Intensitätsverlauf. Diese Unsymmetrie ist um so stärker, je größer die Winkelabhängigkeit der Streustrahlung ist, und sie ist stark abhängig von der relativen Lage des Bandes zum Primärstrahl.

2. Die Artmannsche Theorie

Artmann nähert für den flachen Einfall schneller Elektronen auf eine dicht besetzte Netzebene das dreifache periodische Kristallpotential durch das einfach periodische Potential an, das sich nur senkrecht zur Netzebenenchar periodisch ändert und parallel zu den Netzebenen gemittelt, also konstant ist. Flacher Einfall heißt dabei Einfall unter Winkeln, die von der Größenordnung des Bragg-Winkels sind. Für dieses einfach periodische Potential führt die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung auf die bekannte Hillsche Determinante.

Es ist aber zu beachten, daß die Elektronen, wenn die kinetische Energie ihrer Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Netzebenenchar kleiner ist als die Tiefe der Potentialrinne, in der Potentialmulde gebunden sind. Sie können die Netzebene nicht mehr durchfliegen und es handelt sich nicht um freie Elektronen, wie sie in der dynamischen Theorie von Bethe¹³⁾ vorausgesetzt werden. In diesem Fall ersetzt Artmann den Potentialverlauf im unteren Teil der Potentialmulde durch eine Parabel, so daß sich die gebundenen Elektronen praktisch wie harmonische Oszillatoren verhalten.

Eine Abschätzung zeigt, daß bei den von Artmann betrachteten Netzebenen mit einer Furchentiefe des Potentials von etwa 50 Volt, für flach einfallende Elektronen die drei untersten Eigenfunktionen dem gebundenen Zustand zuzuordnen sind, während die höheren Eigenfunktionen den freien Elektronen entsprechen.

Die Bandintensität wird wieder mit Hilfe des Reziprozitätssatzes berechnet. In erster Näherung kann der Beitrag der freien Elektronen gegenüber dem der gebundenen vernachlässigt werden, und Artmann erhält so für die Intensität des Bandes, wenn die Intensität des Streuuntergrundes gleich eins gesetzt wird,

$$J = 1 + 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}L^2} - 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{L^2}{2}}. \quad (3)$$

Dabei ist $k_x = k \cdot \sin \alpha$ die Komponente des Wellenvektors $\mathfrak{K} = \frac{2\pi}{\lambda}$ in der Richtung senkrecht zur Netzebenenchar, und L eine durch die jeweilige Potentialgestalt bestimmte Länge von der Größenordnung $\frac{d}{6}$ (d = Netzebenenabstand).

In Abb. 13 wurde speziell $L = \frac{d}{6}$ gewählt.

Artmann berücksichtigt in einer späteren Arbeit⁹⁾ auch die Wirkung der freien Elektronen. Er findet, daß ein merklicher Beitrag nur für die beiden Bragg-

Richtungen vorhanden ist. Dort wird der Intensitätskurve von Abb. 13 ein kleiner Intensitätsbuckel überlagert, und man erhält an dieser Stelle einen etwas steileren Intensitätsabfall.

Die Artmannsche Rechnung, die die kurze Zusammenfassung eines Vielstrahlproblems darstellt, ist in dem Bereich anwendbar, in dem der Zweistrahfall und damit die Fues-Riedelsche Rechnung nicht mehr zulässig ist.

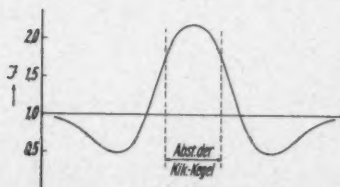


Abb. 13. Intensität des Kikuchi-Bandes nach Artmann

E. Vergleich mit der Theorie

Es sollen nun die beobachteten Bänder, die in Kap. C wiedergegeben sind, den theoretischen Ergebnissen gegenübergestellt werden.

Für die dichtest besetzte Netzebene (1210) mit dem errechneten Fourierkoeffizienten $\Phi = 7,7$ Volt¹⁶) und dem Netzebenenabstand $d = 2,30$ ÅE ist das Verhältnis

$$\frac{U(1\bar{2}10)}{V(1\bar{2}10)} = 0,27.$$

Die Voraussetzung der Fues-Riedelschen Rechnung ($\frac{U}{V} < 0,1$) ist bei weitem nicht erfüllt, wir haben vielmehr nach Artmann den gebundenen Zustand, und das (1210)-Band zeigt in der Tat einen Intensitätsverlauf (Abb. 4), wie er von Artmann berechnet wird (Abb. 13).

Der Fourierkoeffizient der (1231)-Netzebene beträgt $\Phi = 4,5$ Volt, der Netzebenenabstand $d = 1,47$ ÅE, und das für die Bandform charakteristische Verhältnis ist

$$\frac{U(12\bar{3}1)}{V(12\bar{3}1)} = 0,065.$$

Hier ist nach Gl. (1) die dynamische Theorie mit Beschränkung auf den Zweistrahlfall voll berechtigt. In Abb. 14 ist die nach Fues-Riedel berechnete Intensität des (1231)-Bandes wiedergegeben und damit übereinstimmend beobachtet man in Abb. 4 für das (1231)-Band eine Intensitätseinsattlung in der Mitte. Die beobachtete Einsattlung ist allerdings nicht so stark wie die berechnete.

Für die (2021)-Netzebene ($\Phi = 6,0$ Volt, $d = 1,95$ ÅE) ist

$$\frac{U(20\bar{2}1)}{V(20\bar{2}1)} = 0,15.$$

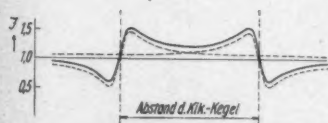


Abb. 14. Intensität des (1231)-Bandes nach Fues-Riedel¹⁶). Die Intensität der Kikuchi-Linien ist gestrichelt gezeichnet

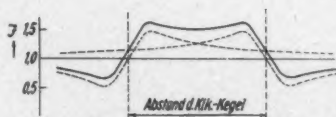


Abb. 15. Intensität des (2021)-Bandes nach Fues-Riedel¹⁶)

¹⁶) Die Fourierkoeffizienten wurden über die Ladungsverteilung der Elektronen im Atom (nach Fermi) berechnet¹⁷).

¹⁷) A. Sommerfeld u. H. Bethe, Hdbch. d. Phys. Geiger-Scheel Bd. 24, 2, S. 423 (1933).

¹⁸) Für die (1231)-Netzebene liegen die Pb-Atome genau in einer Ebene und die J-Atome zu beiden Seiten in einem Zwölftel des Netzebenenabstandes. Dasselbe gilt für die Netzebene (2021). Der Faktor

$$\frac{1}{Q} \sum_q \cos \mathfrak{B} r_q$$

in Gl. (2) ist sowohl für (1231) als auch für (2021) gleich 0,91.

Die Fues-Riedelsche Rechnung, d. h. einfache Zweistrahlskopplung würde für $\frac{U}{V} = 0,15$ noch eine leichte Einsattlung in der Bandmitte ergeben (Abb. 15). Davon ist in der Photometerkurve nichts zu sehen, die Intensität bleibt vielmehr über den ganzen mittleren Bereich konstant (Abb. 4). Es ist jedoch zu bedenken, daß hier der Gültigkeitsbereich der Fues-Riedelschen Theorie ($\frac{U}{V} < 0,1$) bereits überschritten ist und schon eine Mehrstrahlkopplung vorliegt. Aber auch die Artmannsche Theorie ist noch nicht berechtigt. Die Artmannsche Rechnung wäre zu modifizieren, da hier nur der unterst gebundene Elektronenzustand möglich ist und nicht deren drei wie in der Artmannschen Rechnung.

Qualitativ gesehen zeigen die beobachteten Bänder einen Intensitätsverlauf, wie er nach der Theorie zu erwarten ist. Ein quantitativer Vergleich ist allerdings insofern problematisch, als die wirkliche Bandintensität von der Kristalldicke abhängt und mit wachsender Dicke bis zu verschwindend kleinen Werten abnimmt. Wir finden durchweg, auch bei den dünnsten durchstrahlten Kristallen, die gemessene Bandintensität deutlich kleiner als nach der Theorie zu erwarten wäre. Nach der Artmannschen Rechnung ist das Verhältnis von Intensitätsmaximum in der Bandmitte zur Intensität des Streuuntergrunds (Gl. (3))

$$\frac{J_{BM}}{J_{Str.}} = 2,2,$$

und für das Artmannsche ($\bar{1}210$)-Band ist das größte bei einer Kristalldicke von 500 ÅE gemessene Intensitätsverhältnis (Abb. 4)

$$\frac{J_{BM}}{J_{Str.}} = 1,4.$$

Für das ($12\bar{3}1$)-Band ist nach Fues-Riedel das Verhältnis der Intensität in der Bandmitte zur Intensität des Streuuntergrundes (Abb. 14)

$$\frac{J_{BM}}{J_{Str.}} = 1,23.$$

Gemessen wurde (Abb. 4)

$$\frac{J_{BM}}{J_{Str.}} = 1,13.$$

Wenn wir für das ($20\bar{2}1$)-Band noch nach Fues-Riedel rechnen, so ist (Abb. 15)

$$\frac{J_{BM}}{J_{Str.}} = 1,5,$$

der gemessene Wert aber

$$\frac{J_{BM}}{J_{Str.}} = 1,32.$$

Da die beobachtete Bandintensität allgemein kleiner ist als die berechnete, ist wohl anzunehmen, daß auch die dünnen Kristalle von 500 ÅE schon merkliche Absorption aufweisen und dadurch, wie im nächsten Kapitel gezeigt werden soll, die Bandintensität verringert wird.

F. Zum Umschlag von hellen zu dunklen Bändern

1. Abhängigkeit der Bandintensität von der Kristalldicke

In den Artmannschen und Fues-Riedelschen Arbeiten wird die Absorption der Elektronen im Kristall vernachlässigt. Um die allmähliche Abnahme der Bandintensität und den schließlichen Umschlag zum dunklen Band bei zunehmender Kristalldicke zu verstehen, wird nun die Absorption der Elektronen berücksichtigt. Dabei zeigt sich, daß die Elektronen in der Umgebung der Interferenzrichtung gegenüber den Richtungen, die weit ab von einem Interferenzkegel liegen, völlig veränderte Absorption erfahren. Durch dieses abweichende Verhalten im Falle der Interferenz läßt sich die beobachtete Änderung der Bandintensität mit der Kristalldicke verständlich machen.

Wenn in der Nähe eines Interferenzkegels eingestrahlt wird, so haben wir für den Bragg-Fall im Kristall ein Wellenfeld, bestehend aus den beiden Wellen \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{H}_m und für den Laue-Fall zwei derartige Wellenfelder, die an Stelle der einfachen ebenen Welle \mathfrak{H}_0 treten (vgl. Abb. 26)¹⁴⁾. Da die Wellenvektoren \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{H}_m sich um die Translation \mathfrak{P}_m unterscheiden, geben sie eine räumliche Periodizität der Intensität im Kristall; es entstehen Ebenen maximaler und minimaler Schwingung, die senkrecht zu \mathfrak{P}_m , also parallel zur reflektierenden Netzebenen-schar liegen. Bei einer Interferenz erster Ordnung ist der Abstand zweier benachbarter Schwingungsmaxima bzw. Minima gleich dem Netzebenenabstand.

Im Laue-Fall haben wir dazuhin noch eine periodische Änderung der Schwingung mit der Tiefe unter der Kristalloberfläche (Pendellösung), die aber für die vom Kristall ausgehende Streustrahlung bei den in Frage kommenden Kristalldicken vernachlässigt werden kann¹⁵⁾.

Die im Interferenzfall zwischen den Netzebenen hin und her reflektierten Elektronen bilden eine stehende Bewegung senkrecht zu den Netzebenen und eine fortschreitende Bewegung parallel zu den Netzebenen. Die Energiefortpflanzung durch den Kristall erfolgt also nur in zu den Netzebenen parallelen Ebenen. Dies ist der wahre Absorptionsweg, der den Kristall durchflutenden Elektronenwellen, nicht etwa der zwischen den Netzebenen hin und her pendelnde Weg, den die Elektronen nach der gewöhnlichen Vorstellung zurücklegen müßten.

Beim Durchgang durch die Interferenzrichtung findet infolge der Änderung der Phasendifferenz zwischen der einfallenden Welle \mathfrak{H}_0 und der gebeugten Welle \mathfrak{H}_m eine Verschiebung der Knoten und Bäuche im Kristall statt. Drehen wir den Einfallstrahl nach größeren Einfallswinkeln φ etwas aus der Interferenzrichtung heraus, so wandern die Schwingungsbäuche in die Netzebenen ein, während bei Einstrahlung auf der anderen Seite, nach kleineren Einfallswinkeln hin, die Schwingungsknoten in die Netzebenen zu liegen kommen^{14) 21)}. Dieses Verhalten, das, auf die Emission der inkohärenten Strahlung angewandt, den Intensitätssprung beim Überschreiten einer Bragg-Richtung ergibt^{11) 12)}, ist auch für die Absorption, die die Strahlung beim Durchlaufen durch den Kristall erfährt, heranzuziehen. Es ist anzunehmen, daß die Elektronen auf der einen Seite der Interferenzrichtung, wo die Schwingungsbäuche mit den Netzebenen zusammenfallen, die Gitterbausteine also sehr stark von der Welle erfaßt werden, verstärkte Absorption, auf der anderen Seite, wo die Schwingungsknoten in den Netzebenen

¹⁴⁾ Bei einer Strahlenspannung von 50 kV ist z. B. für (1210) die Tiefe einer ganzen Schwebungsperiode 350 ÅE²⁰⁾.

²⁰⁾ C. H. Mac Gillavry, *Physica* 7, Nr. 4, 329 (1940).

liegen und die Bewegung zwischen den Gitterbausteinen durchschlüpft, dagegen verringerte Absorption erfahren²¹⁾.

Wir beschränken uns zunächst auf die Fues-Riedelschen Bänder (Zweistrahlfall). Nach dem Reziprozitätssatz haben wir in der Intensität der emittierten Strahlung ein Maß für die Schwingungsamplitude der stehenden Wellen am Ort der reflektierenden Netzebenen und damit direkt ein Maß für die Größe der Absorption. Die Absorptionskurve für die Umgebung der Interferenzrichtung (Abb. 16) hat also qualitativ denselben Verlauf, wie die von Fues-Riedel berechnete Emissionskurve der Kikuchi-Linien (Abb. 14). Die Änderung der Absorption im Interferenzfall wird dabei um so ausgeprägter sein, je länger die Wege sind, die die Streustrahlung im Kristall zurückzulegen hat.

So wird bei zunehmender Kristalldicke die Strahlung im Bandinnern mehr und mehr gegenüber der außerhalb des Bandes benachteiligt. Der durch die größere Emission im Innern gegebene Intensitätsüberschuß wird geringer, die Bänder verblassen und man erhält schließlich die dunklen Bänder, die eine gegen



Abb. 16. Absorption in der Umgebung der Interferenzrichtung. Einfallswinkel φ ist Winkel zwischen Strahl und Netzebenen-Normalen

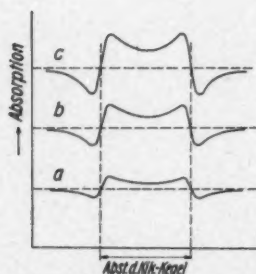


Abb. 17. Absorption in der Umgebung des Bandes bei geringer Absorption *a*, bei mittlerer Absorption *b*, bei größerer Absorption *c*

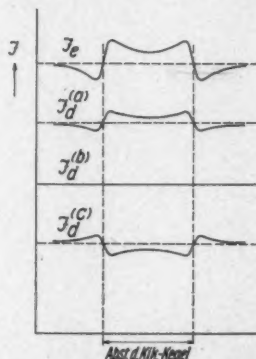


Abb. 18. Die von der emittierten Strahlung J_e aus dem Kristall austretende Intensität J_d bei den verschiedenen starken Absorptionen *a*, *b*, und *c* der Abb. 17

den Untergrund verringerte Intensität zeigen. Dieses Verhalten soll an Hand der Abb. 18 deutlich gemacht werden. Dort ist die von der emittierten Strahlung J_e aus dem Kristall austretende, also zu beobachtende Intensität J_d für die

²¹⁾ M. v. Laue, Ann. Physik (5) **23**, 705 (1935).

²²⁾ W. Kossel, Ann. Physik (6) **6**, 97 (1949). G. Borrmann, Z. Physik **127**, 297 (1950).

verschieden großen Absorptionen a , b , und c der Abb. 17 skizziert. Die Kurven J_d zeigen Bandintensitäten, wie sie bei verschiedenen dicken Kristallen tatsächlich beobachtet werden. Bemerkenswert ist, daß der nach dieser Überlegung zu erwartende Grenzfall $J_d^{(b)}$, für den die Intensität des Bandes gleich der des Streuuntergrundes und auch die Bandkanten — die Kikuchi-Linien — sich überraschenderweise nicht mehr aus dem Untergrund abheben, daß dieser konstante Intensitätsverlauf über das ganze Band hinweg wirklich beobachtet wurde (Abb. 10).

Bei den Artmannschen Bändern, wo an Stelle des Zweistrahlfalles ein Vielstrahlproblem vorliegt, kann die Emission im Band und damit auch die Absorption nicht mehr als Überlagerung der beiden Bandkanten aufgefaßt werden. Aber nach dem Reziprozitätssatz läßt sich auch hier sagen, daß für die Richtungen, in denen stark emittiert wird, auch andererseits stark absorbiert wird, und die Absorptionskurve wieder etwa den Verlauf der Emissionskurve zeigt (Abb. 13). Das hier zu erwartende Absorptionsmaximum in der Bandmitte ergibt sich übrigens auch für den Zweistrahlfall in der Grenze für hohes $\frac{U}{V}$.

Nach diesen Überlegungen ist verständlich, daß bei Bleijodid mit seinem hohen Absorptionsvermögen der Umschlag von hellen zu dunklen Bändern schon bei wesentlich kleineren Kristalldicken auftritt als bei Glimmer oder Graphit. Graphit zeigt noch bei Kristalldicken von 2200 ÅE helle Bänder²³⁾.

Es soll noch erwähnt werden, daß der Wechsel der Hell-Dunkel-Struktur der Kossel-Kurven²⁴⁾ beim Übergang von weicher zu harter Röntgenstrahlung, und das bei harter Strahlung zu beobachtende helle Band^{25) 26)}, sich ebenfalls auf verschiedene Absorption zu beiden Seiten der Interferenzrichtung zurückführen läßt. Bei Röntgenstrahlen herrscht, im Gegensatz zu den Elektronenstrahlen, im Innern des Bandes verringerte, außerhalb des Bandes verstärkte Absorption.

2. Abhängigkeit der Bandintensität von der Richtung gegen den Primärstrahl

Es bleibt noch zu fragen, wie die Abhängigkeit der Bandintensität von der Abweichung gegen die Primärstrahlrichtung zu verstehen ist. Man beobachtet, daß besonders bei dickeren Kristallen die Intensitätserfüllung im Innern ein und desselben Bandes mit wachsender Entfernung vom Primärfleck mehr und mehr zunimmt (Abb. 7, 8, 9).

Wir erinnern daran, daß die Kikuchi-Linien und Kikuchi-Bänder nicht direkt vom Primärstrahl, sondern von der Streustrahlung erzeugt werden. Die Streustrahlung, die von Atomen ausgeht, die in der Nähe der Eintrittsfläche liegen, ist stark winkelabhängig und hat nur für einen kleinen Winkelbereich in der Umgebung der Primärstrahlrichtung starke Amplitude. Aus diesem engen Streukegel entsteht durch Streuung an tieferliegenden Atomen ein weiter geöffnetes Bündel, das durch weitere Streuung noch mehr geöffnet wird und so fort

²³⁾ J. Hoerni, *Helv. phys. Acta* **23**, 587 (1950).

²⁴⁾ W. Kossel, H. Loeck u. H. Voges, *Z. Physik* **94**, 139 (1935). W. Kossel u. H. Voges, *Ann. Physik* **23**, 677 (1935). W. Kossel, *Ann. Physik* **25**, 512 (1936); **26**, 533 (1936). G. Borrmann, *Naturwiss.* **23**, 591 (1935); *Ann. Physik* **27**, 669 (1936). H. Voges, *Ann. Physik* **27**, 694 (1936). G. Borrmann, *Z. Kristallogr.* **100**, 228 (1939). Zusammenfassung: W. Kossel, *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **16**, 295 (1937).

²⁵⁾ H. Determann, *Schr. d. Naturf. Ges. Danzig XX*, S. 5 (1937).

²⁶⁾ H. C. Wolf, *Dissertation* Tübingen 1952.

(Abb. 19). Infolge Mehrfachstreuung tritt eine immer stärkere Winkeldiffusion der Streustrahlung auf. Danach wird aber die Strahlung mit großer Winkelabweichung von der Primärstrahlrichtung im wesentlichen von Streuatomen ausgehen, die tiefer im Kristall liegen.

Wir interessieren uns hier nur für die Streustrahlung, die für das Kikuchi-Band verantwortlich ist, die also in der Umgebung eines Interferenzkegels den

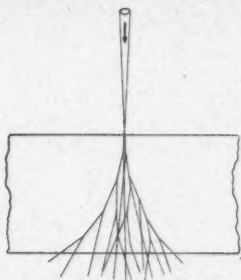


Abb. 19. Zunehmende Winkeldiffusion der Streustrahlung mit der Tiefe im Kristall

Kristall durchläuft. Da diese Strahlung zu beiden Seiten der Interferenzrichtung ganz verschiedene Absorption erfährt, ist die Bandintensität davon abhängig, welche Wegstrecke diese Strahlung vom Streuatom aus durch den Kristall zurücklegt, d. h. in welcher Tiefe das Streuatom im Kristall liegt. Für stark vom Primärstrahl abweichende Richtungen, für die die Anregung aus tiefer im Kristall gelegenen Streuatomen überwiegt, herrschen im Interferenzfall solche Absorptionsverhältnisse, wie sie sonst bei dünneren Kristallen vorliegen, und man erwartet dort mehr Intensität im Innern eines Bandes, als für Richtungen mit geringer Winkelabweichung von der Primärstrahlrichtung.

So wird verständlich, daß das $(\bar{1}\bar{2}10)$ -Band in Abb. 9, das in der Umgebung des Primärflecks noch dunkel, in größerer Entfernung vom Primärfleck hell erscheint.

G. Zusammenfassung

Es werden PbJ_2 -Kristalle im konvergenten Elektronenbündel durchstrahlt. Durch Farbstoffzusatz zur Lösung, aus der die Kristalle durch Fällung hergestellt werden, gelingt es, besonders große und besser aufgebaute Kristallblättchen zu bekommen.

Die Intensität der Kikuchi-Bänder $(\bar{1}\bar{2}10)$, $(20\bar{2}1)$ und $(12\bar{3}1)$ wird bei verschiedenen dicken Kristallen gemessen und mit den Ergebnissen der Artmannschen und Fues-Riedelschen Rechnungen verglichen. Der bei dünnen Kristallen beobachtete Intensitätsverlauf stimmt qualitativ mit der Theorie überein. Das $(\bar{1}\bar{2}10)$ -Band hat ein stark überhöhtes Intensitätsmaximum in der Mitte (Artmannsches Band) und das $(12\bar{3}1)$ -Band, das nach Fues-Riedel als Wirkung einer einfachen Zwei- bzw. Dreistrahlkopplung zu verstehen ist, zeigt in der Mitte eine Einsattelung der Intensität. Im $(20\bar{2}1)$ -Band haben wir den Übergang vom Fues-Riedelschen zum Artmannschen Band. Die gemessene Bandintensität ist allerdings in allen Fällen geringer als die errechnete. Es wird darauf hingewiesen, daß ein quantitativer Vergleich mit der Theorie nur erlaubt ist, solange der Kristall noch keine merkliche Absorption zeigt.

Die abnehmende Bandintensität und der schließliche Umschlag vom hellen zum intensitätsarmen dunklen Band bei zunehmender Kristalldicke wird verfolgt und auf verschiedene Absorption zu beiden Seiten der Interferenzrichtung zurückgeführt. Der beim Übergang vom hellen zum dunklen Band zu erwartende Grenzfall verschwindender Bandintensität wird beobachtet, und es zeigt sich, daß in diesem Fall auch die Kikuchi-Linien, die Bandkanten sich nicht mehr aus dem Untergrund abheben.

Die zu beobachtende Änderung der Bandintensität mit der Winkelabweichung von der Primärstrahlrichtung läßt sich verstehen, wenn man bedenkt, daß die unter größerem Winkel gegen die Primärstrahlrichtung verlaufende Streustrahlung in wesentlichen von tiefer im Kristall liegenden Streuatomen ausgeht.

II. Anomalien und starke dynamische Wechselwirkungen bei Mehrstrahlkopplung

A. Intensitätsanomalien bei Umweganregung

1. Einleitung

I. Ackermann⁶⁾ beobachtete bei Untersuchungen an PbJ_2 , daß an der Stelle wo sich die drei Kikuchi-Linienpaare ($\bar{3}030$), ($2\bar{3}11$) und ($5\bar{3}\bar{2}1$) kreuzen, ($5\bar{3}\bar{2}1$) auf eine kurze Strecke ausfällt.

Diese Erscheinung wurde verfolgt, und es sind weitere solche Ausfallstellen beobachtet worden. Man findet, daß gelegentlich ein Kikuchi-Linienpaar m in einem Winkelbereich, der durch zwei kreuzende Bänder p und q gebildet wird,

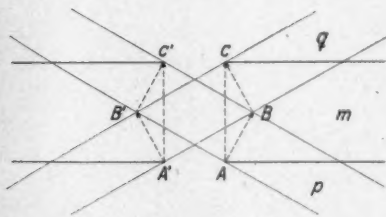


Abb. 20. Intensitätsschwächung

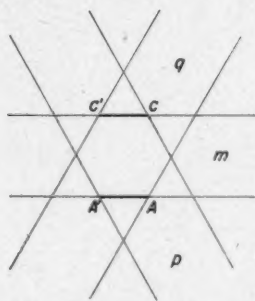


Abb. 21. Intensitätsverstärkung

ausfällt. Dies allerdings nur für einen Bereich ausserhalb der beiden kreuzenden Bänder p und q , die im folgenden als Störbänder bezeichnet werden (Abb. 20). Bei einem Verlauf innerhalb der Störbänder tritt dagegen eine Verstärkung auf (Abb. 21), die aber bei PbJ_2 nicht sehr deutlich zu beobachten ist.

C. Menzel-Kopp²⁷⁾ hat dieselbe Erscheinung an Glimmer studiert und ausführlich darüber berichtet. Sie fand, daß für die beiden Begrenzungen der Ausfallstelle — A und A' in Abb. 20 — jeweils eine Umweganregung über die beiden Störbänder gegeben ist. In der Umgebung von A wird einmal die Intensität direkt über das Band m nach C und außerdem auf dem Umweg über die Störbänder p und q über B nach C reflektiert.

2. Beobachtungen

Bei allen an Bleijodid beobachteten Ausfallerscheinungen zeigte sich, daß in gleicher Weise wie für Glimmer Umwegreflexion über die beiden die Ausfallstelle begrenzenden Störbänder gegeben ist. Die Umwegreflexion muß als wesentliche

²⁷⁾ C. Menzel-Kopp, Ann. Physik (6) 9, 259 (1951).

Voraussetzung für das Auftreten dieser Intensitätsanomalien angesehen werden. Außerdem ist die Strukturamplitude für den ausfallenden Reflex stets kleiner als für die Störreflexe. Eine Abhängigkeit von der Präparatdicke besteht nicht. Auch

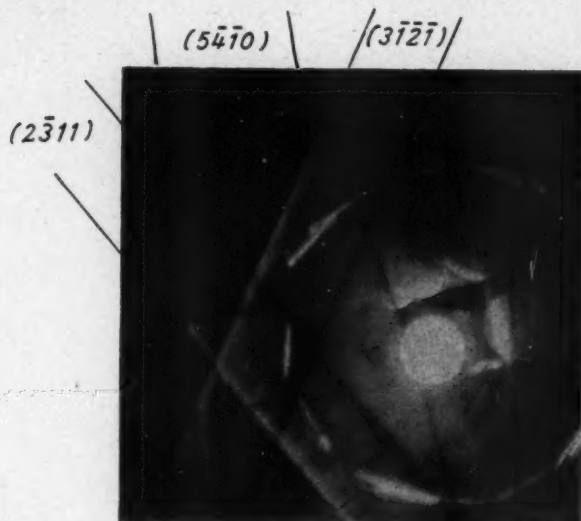


Abb. 22. Ausfall von $(5\bar{4}10)$ zwischen den Bändern $(2\bar{3}11)$ und $(3\bar{1}2\bar{1})$. Präparatdicke ~ 700 Å. Strahlspannung 56 kV

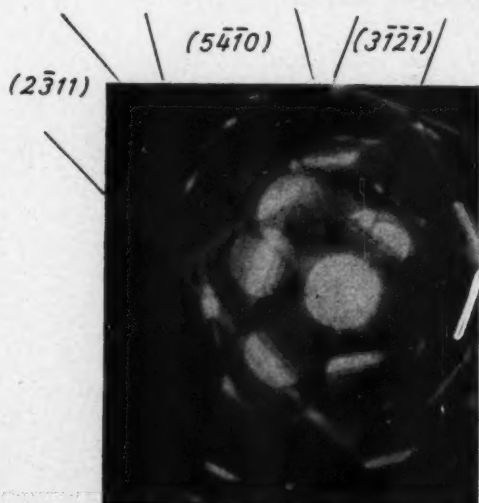


Abb. 23. Ausfall von $(5\bar{4}10)$ bei direktem Anschuß. Präparatdicke ~ 700 Å. Strahlspannung 56 kV

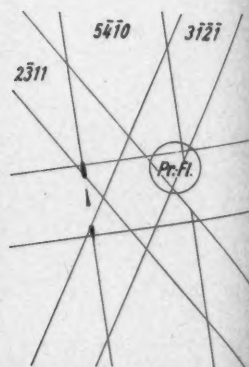


Abb. 23a. Schema zu Abb. 23

bei sehr dicken Kristallen, bei denen die Kikuchi-Bänder bereits dunkel sind, zeigt sich der Ausfall in derselben Weise wie bei hellen Bändern.

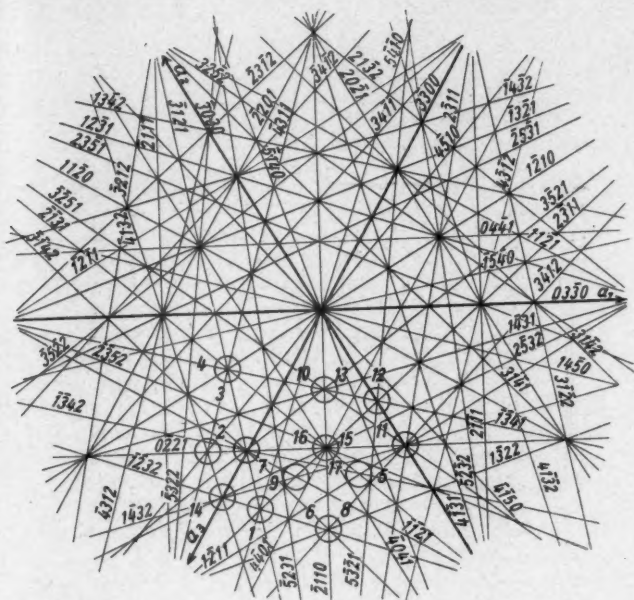


Abb. 24. Netzebenenschema von PbJ_2 . Die Ausfallstellen sind durch Kreise markiert

Tabelle 1
Beobachtete Ausfallerscheinungen

(Die Störreflexe, die die Ausfallstelle begrenzen, stehen jeweils hinter dem ausfallenden Reflex)

| | | | |
|--------------------------|----------------------|--------------------------|----------------------|
| 1. $(5\bar{4}10)$ | $(2\bar{3}11)$ | 2. $(4\bar{5}10)$ | $(0\bar{2}21)$ |
| | $(3\bar{1}\bar{2}1)$ | | $(4\bar{3}11)$ |
| 3. $(4\bar{3}11)$ | $(\bar{3}121)$ | 4. $(\bar{1}\bar{3}41)$ | $(\bar{2}\bar{1}31)$ |
| | $(1\bar{2}10)$ | | $(1\bar{2}10)$ |
| 5. $(\bar{1}\bar{3}42)$ | $(\bar{2}\bar{1}31)$ | 6. $(\bar{3}\bar{1}42)$ | $(\bar{2}110)$ |
| | $(1\bar{2}11)$ | | $(1\bar{2}32)$ |
| 7. $(\bar{3}\bar{1}42)$ | $(0\bar{2}21)$ | 8. $(\bar{3}412)$ | (2110) |
| | $(\bar{3}121)$ | | $(1\bar{3}22)$ |
| 9. $(1\bar{4}32)$ | $(1\bar{1}21)$ | 10. $(\bar{3}\bar{2}51)$ | $(1\bar{3}41)$ |
| | $(2\bar{3}11)$ | | $(\bar{2}110)$ |
| 11. $(\bar{3}\bar{2}51)$ | $(\bar{3}030)$ | 12. $(5\bar{3}\bar{2}1)$ | $(30\bar{3}0)$ |
| | $(0\bar{2}21)$ | | $(2\bar{3}11)$ |
| 13. $(3\bar{5}21)$ | $(1\bar{4}31)$ | 14. $(2\bar{5}32)$ | $(3\bar{3}00)$ |
| | (2110) | | $(1\bar{2}32)$ |
| 15. $(2\bar{5}32)$ | $(0\bar{2}21)$ | 16. $(\bar{2}\bar{5}52)$ | $(0\bar{2}21)$ |
| | $(2\bar{3}11)$ | | $(\bar{2}\bar{1}31)$ |
| 17. $(\bar{4}041)$ | $(\bar{2}110)$ | | |
| | $(\bar{2}\bar{1}31)$ | | |

Als Beispiel wird in der Aufnahme Abb. 22 der Ausfall von $(5\bar{4}10)$ zwischen den beiden Bändern $(2\bar{3}11)$ und $(3\bar{1}2\bar{1})$ gezeigt. Man bemerkt, daß der Reflex $(5\bar{4}10)$ direkt vor dem Ausfall auf ein kurzes Stück eine Verstärkung erfährt. In Aufnahme Abb. 23 ist diese Ausfallstelle direkt angeschossen und zur Hälfte von der Primärscheibe überdeckt. Man sieht innerhalb der Reflexscheibe $(5\bar{4}10)$, daß die Schwächung unmittelbar nach Überqueren des Störbandes am stärksten ist, und daß gegen die Mitte der Ausfallstelle zu die Intensität wieder anwächst.

Um eine Übersicht über die Verteilung der Ausfallstellen zu bekommen, geben wir ein Netzebenenschema, in dem sie durch Kreise eingezeichnet sind (Abb. 24). Ferner zählt Tabelle 1 die beobachteten Ausfallreflexe.

3. Deutung

Die beobachteten Intensitätsanomalien lassen sich an Hand der Phasenbeziehungen zwischen den beteiligten Wellen verstehen. Es zeigt sich, daß beim Überqueren des Störreflexes die Ausbreitungsfläche des ausfallenden Reflexes in dem Sinne deformiert wird, daß zu beiden Seiten der Überkreuzungsstelle um π veränderte Phasenverhältnisse herrschen; der direkte Reflex ist auf der einen Seite mit der einfallenden Welle in Phase, auf der andern in Gegenphase. Da der Umwegreflex in jedem Fall gegen die einfallende Welle um π phasenverschoben ist, sind auf der einen Seite der direkte und der Umweg-Reflex in Phase, sie unterstützen sich, auf der andern Seite sind sie in Gegenphase, sie schwächen sich und geben den beobachteten Intensitätsausfall.

Wir wollen zunächst auf die Phase des Umwegreflexes eingehen. Wenn die Netzebene p unter einem Winkel angestrahlt wird, der kleiner ist als der Bragg-Winkel, der Einfallsstrahl also innerhalb des Bandes p verläuft, z. B. in A_2 der Abb. 25, und der reflektierte Strahl außerhalb des Bandes in B_2 , dann sind der

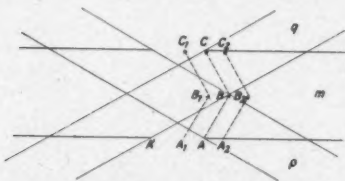


Abb. 25. Zur Phase des Umwegreflexes; m Ausfall-Reflex, p und q Störreflexe

einfallende und der reflektierte Strahl in Phase. Bei Einstrahlung außerhalb des Bandes, z. B. in A_1 , sind der einfallende und der reflektierte Strahl um π phasenverschoben. Die Bragg-Richtung trennt diese beiden Bereiche verschiedenen Phasenverhaltens. Dies läßt sich an der Ausbreitungsfläche¹⁴⁾ direkt ablesen. Wir haben hier die Analogie zu der Phasenänderung gekoppelter Schwingungen beim Durchgang durch Resonanz. Die in der

Umgebung von A über das Band p reflektierte Intensität erfährt eine weitere Reflexion über das Band q . Dabei ist zu beachten, daß die Strahlen, die in Phase über p reflektiert werden, bei der anschließenden Reflexion über q eine Phasenänderung um π erfahren und umgekehrt. Wir wollen also festhalten, daß der Umwegreflex in jedem Fall in Gegenphase arbeitet.

Wir erinnern nun an die gewohnte Darstellung der Ausbreitungsfläche für den Zweistrahlfall. Die beiden Ausbreitungskugeln vom Radius $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ um die beiden Gitterpunkte O und M des reziproken Gitters — wobei der Vektor $OM = -\mathfrak{B}_m$ — erfahren in der Umgebung des Schnittkreises S infolge der Kopplung der dort starken Wellen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_m eine Deformation. In Abb. 26 sind die Kugeln

durch die Tangentialebenen im Schnittpunkt ersetzt und die beiden Wellenfelder im Laue-Fall für die Interferenzrichtung eingezeichnet. Längs der Hyperbelschale S_2 sind \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_m in Phase, längs der Schale S_1 sind \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_m in Gegenphase¹⁴⁾.

Da wir uns ausschließlich für die Verhältnisse längs der Kikuchi-Linien von m , d. h. für die Bragg-Richtung interessieren, ist es günstiger, durch F_1F_2 einen Schnitt senkrecht zu der Darstellung der Abb. 26 zu wählen. Für diesen Schnitt

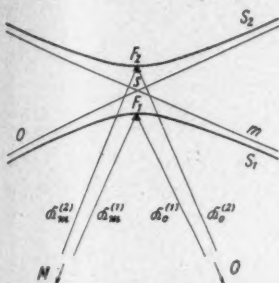


Abb. 26. Ausbreitungsfläche für den Interferenzfall bei Zweistrahlskopplung

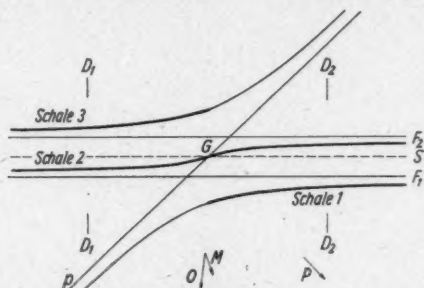


Abb. 27. Ausbreitungsfläche bei drei starken Strahlen \mathfrak{R}_0 , \mathfrak{R}_m und \mathfrak{R}_p . Die wirksame Ausbreitungsfläche für den Reflex m ist verstärkt gezeichnet. Die gestrichelte Gerade S ist der Schnitt der Ausbreitungskugeln um O und M . In G ist gleichzeitig die Braggrichtung für den Reflex m und p gegeben

besteht die Ausbreitungsfläche aus zwei parallelen Geraden im Abstand F_1F_2 . Für die Umgebung von A in Abb. 25, wo der Reflex p mit angeregt wird, haben wir allerdings eine Dreistrahlskopplung. Die hier notwendige Mitberücksichtigung

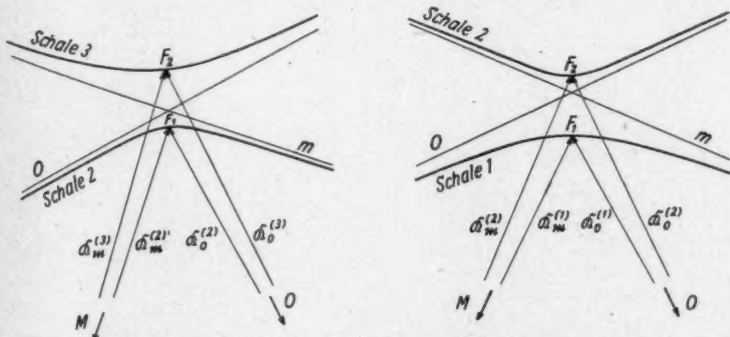


Abb. 28. Senkrechter Schnitt zu der Darstellung der Abb. 27 an der Stelle D_1 und D_2

der Ausbreitungskugel um $P(OP = \mathfrak{R}_p)$ ergibt eine Deformation der Ausbreitungsfläche, wie es in Abb. 27 skizziert ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Strukturfaktor des Störreflexes p größer ist als der Strukturfaktor von m , wie es allgemein

bei den Ausfallerscheinungen gegeben ist. Infolgedessen erfährt die wirksame Ausbreitungsfläche für den Reflex m — in Abb. 27 verstärkt gezeichnet — eine starke Abweichung von den Geraden F_1 und F_2 , der Ausbreitungsfläche im ungestörten Zweistrahlfall.

Bei einfacher Zweistrahlkopplung existieren für die Bragg-Richtung zwei gleich starke Wellenfelder, die zu gleichen Teilen die Phase zwischen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_m bestimmen (Abb. 26), entsprechend der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingung bei Resonanz. Bei der in Abb. 27 wiedergegebenen Dreistrahlkopplung, wo in der Umgebung von G die Schale 2 im Gegensatz zu den Schalen 1 bzw. 3 kaum von den Ausbreitungskugeln O und M abweicht — wie dies in Abb. 28 nochmals deutlich gemacht wird —, hat das Wellenfeld der Schale 2 weit größere Amplitude als das der Schale 1 bzw. 3. Die Phase zwischen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_m wird im wesentlichen von diesem starken Wellenfeld bestimmt, für das aber zu beiden Seiten von G , der gemeinsamen Bragg-Richtung von m und p , um π veränderte Phasen herrschen. Rechts von G , wo auf der Schale 2 die Ausbreitungsvektoren $|\mathfrak{R}_0|$, $|\mathfrak{R}_m| > K$ (K ist der Radius der Ausbreitungskugeln), sind die beiden Wellen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_m in Phase, links von G , wo $|\mathfrak{R}_0|$, $|\mathfrak{R}_m| < K$, sind sie in Gegenphase. Der Reflex m erfährt beim Überqueren der Bragg-Richtung des Störreflexes p einen Phasensprung um π .

Links von G , im Bandinnern von p (z. B. in A_2 der Abb. 25), hat der direkte Reflex m praktisch dieselbe Phase wie der Umwegreflex über p und q , sie unterstützen sich gegenseitig. Rechts von G , bei Einstrahlung außerhalb des Bandes p ist der Reflex m , der hier mit dem Einfallstrahl praktisch in Phase, gegen den Umwegreflex um π phasenverschoben, sie schwächen sich und geben den beobachteten Ausfall. Es ist auch verständlich, daß zur Mitte der Ausfallstelle zu die Intensitätsschwächung geringer wird, da mit größerer Entfernung von G das Wellenfeld der Schale 2 seine bestimmende Rolle wieder einbüßt.

Die Intensitätsverstärkung bei den in Abb. 21 skizzierten Verhältnissen erklärt sich in derselben Weise. Die Verstärkung des Reflexes m tritt auch dort innerhalb der Störbänder auf. Die Voraussetzung, daß der verstärkte Reflex m von kleinerer Strukturamplitude als die Störreflexe p und q , trifft normalerweise nicht mehr zu. Die Ausbreitungsfläche in Abb. 27 ist in diesem Fall derart abzuändern, daß die Ausbreitungsfläche für den Zweistrahlfall, die beiden Geraden F_1 und F_2 größeren Abstand haben und die Deformation durch den Störreflex p relativ gering ist. Aus diesem Grunde ist diese Intensitätsanomalie, die Verstärkung im allgemeinen nicht so ausgeprägt wie die Ausfallerscheinung.

B. Anomales Verhalten

Es werden in diesem Kapitel Beobachtungen erwähnt, die mit der gewohnten Vorstellung nicht ohne weiteres in Einklang zu bringen sind.

1. Es fällt auf, daß beim senkrechten Einschub in der Aufnahme Abb. 1 auf S. 241 in der Mitte der schmalen Zentralbänder, die von den dichtest besetzten Netzebenen ($1\bar{2}10$), ($11\bar{2}0$) und ($2\bar{1}10$) herrühren, eine intensitätsreiche, helle Linie und zu beiden Seiten außerhalb des Bandes zwischen den Kikuchi-Linien 1. und 2. Ordnung eine schwache dunkle Linie verläuft, die in Abb. 1 nur noch andeutet, auf dem Negativ aber deutlich zu erkennen ist. Da für den einfachen Aufbau der ($1\bar{2}10$)-Netzebene Überstrukturen nicht zu erwarten sind — und eine

Überstrukturlinie in der Bandmitte außerdem gar nicht denkbar ist —, bleiben diese Linien vorerst unverständlich.

2. Das $(1\bar{2}10)$ -Band zeigt bei Dicken um 600 ÅE merkwürdige Reflexionsverhältnisse. Es ist in Abb. 29 annähernd symmetrisch angeschossen. Da die Intensitätsverteilung im Primärfleck und den beiden angrenzenden Reflexscheiben nicht in allen Einzelheiten wiedergegeben ist, sind in Abb. 29a die Intensitätsverhältnisse quer zum Band skizziert. Wir finden im Bandinnern zwei ungewöhnlich starke Extinktionslinien E_1 und E_2 , denen die beiden intensivsten Re-



Abb. 29. Symmetrischer Anschuß des $(1\bar{2}10)$ -Bandes. Starke Reflexion für Richtungen, die von der Bragg-Richtung abweichen. Präparatdicke ~ 600 ÅE. Strahlenspannung 53 kV

flexlinien R_1 und R_2 zugeordnet sind. Diese Zuordnung ist sicher gegeben, da bei verschiedenen Strahlenspannungen, d. h. verschiedenen Bandbreiten, der Abstand $E_1 - R_1$ bzw. $E_2 - R_2$ immer gleich der Breite des $(1\bar{2}10)$ -Bandes ist, also jeweils Ablenkung um den doppelten Bragg-Winkel vorliegt²⁰⁾. Die eingestrahelte Intensität wird nicht für die Bragg-Richtung, sondern für die dagegen abweichende Richtung E_1 bzw. E_2 am stärksten umgesteuert.

Dasselbe findet man auch bei Einstrahlung außerhalb des Bandes. Liegt der Primärfleck im Schema Abb. 29a am Ort der Reflexscheibe 1, so wird besonders stark von R_1 — dort ist jetzt eine Extinktionslinie — nach E_1 , wo nun eine starke Reflexlinie liegt, reflektiert.

Da dies nicht durchweg, sondern nur bei Kristalldicken um 600 ÅE beobachtet wurde, könnte man daran denken, daß für diese Präparatdicke die Energie

²⁰⁾ Der Abstand $E_1 E_2$, gemessen in Einheiten der Bandbreite, verändert sich mit der Strahlenspannung.

größtenteils aus der Reflexions- in die Einfallsrichtung zurückgependelt ist. Nach der dynamischen Theorie mit Beschränkung auf den Zweistrahlfall wird für den

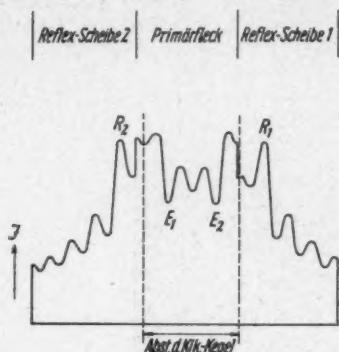


Abb. 29a. Zur Abb. 29. Intensität im Primärfleck und den beiden angrenzenden Reflexscheiben senkrecht zur $(1\bar{2}10)$ -Richtung

Völlig unklar bleiben aber die Intensitätsstufen bei der unsymmetrischen Einstrahlung in der Aufnahme Abb. 30. Der Intensitätsverlauf im Primärfleck

und in der benachbarten intensiven Reflexscheibe ist in Abb. 30a skizziert. Die Intensität wird wieder besonders stark von der Extinktionslinie E im Bandinnern in die Reflexionslinie R umgesteuert. Außerdem trennt die Extinktionslinie E im Primärfleck und die Linie R in der Reflexscheibe zwei Sektoren

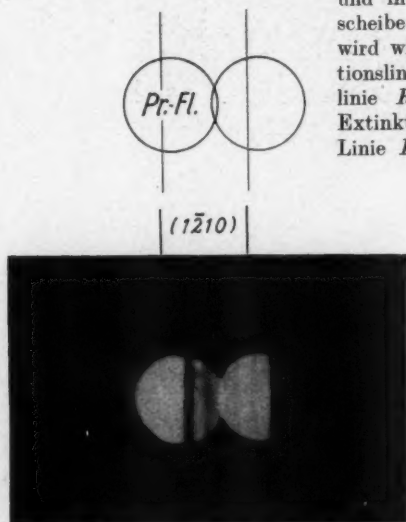


Abb. 30. Unsymmetrischer Anschluß des $(1\bar{2}10)$ -Bandes. Dicke ~ 600 ÅE. Strahlspannung 50 kV

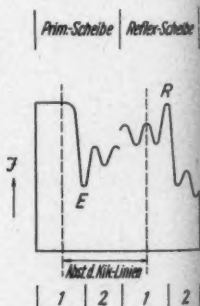


Abb. 30a. Zur Abb. 30. Intensitätsverlauf im Primärfleck und in der Reflexscheibe $(1\bar{2}10)$

verschieden hoher Intensität. Während normalerweise die Intensitäten im Primärfleck und im Reflex zueinander komplementär sind, hat hier der Sektor 1 sowohl im Primärfleck als auch im Reflex viel Intensität und der Sektor 2 im Primärfleck und in der Reflexscheibe gleichermaßen wenig Intensität. Dies steht ganz im Widerspruch zu den gewohnten Beobachtungen, man würde vielmehr erwarten, daß in der Reflexscheibe der Sektor 2 intensiver wäre als der Sektor 1.

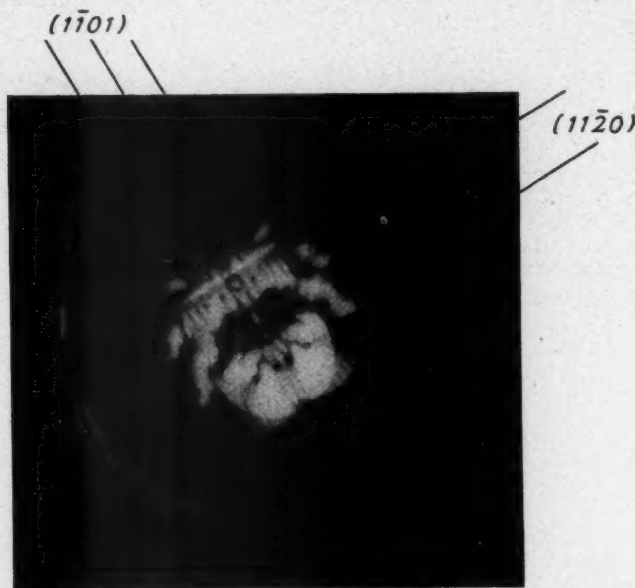
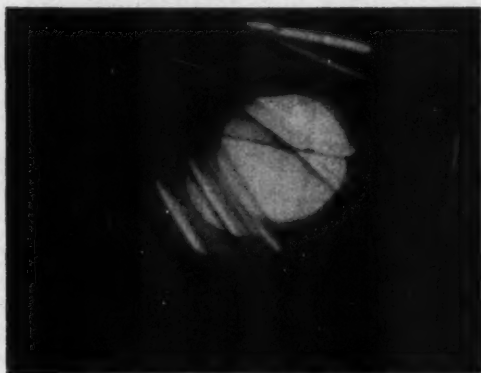


Abb. 31. Symmetrischer Anschau der Netzebene $(1\bar{1}01)$. An Stelle des $(1\bar{1}01)$ -Bandes liegen symmetrisch dazu zwei aneinander-grenzende Bänder. Dicke ~ 900 AE. Strahlspannung 53 kV

3. In der Aufnahme Abb. 31 treten zwei Bänder auf, die nicht indiziert werden können. Dort, wo das $(1\bar{1}01)$ -Band erwartet wird, beobachten wir auf den ersten Blick ein doppelt so breites Band, das der 2. Ordnung von $(1\bar{1}01)$ entsprechen könnte und das in der Bandmitte eine Extinktionslinie aufweist. Im Widerspruch dazu wird der Primärfleck, der symmetrisch zu der erwähnten Extinktionslinie liegt, nach beiden Seiten um einen Winkel umgesteuert, der der halben Bandbreite entspricht. Wir haben hier nicht das Band der 2. Ordnung von $(1\bar{1}01)$, sondern zwei verschiedene, direkt nebeneinander liegende Bänder. Dies wird ganz deutlich bei der unsymmetrischen Einstrahlung in der Aufnahme Abb. 32, wo der Primärfleck zuerst über das eine und von dort über das angrenzende zweite Band reflektiert wird. Die gemessene Breite der beiden Bänder ist jeweils gleich der Breite des zu erwartenden $(1\bar{1}01)$ -Bandes. Die beiden fraglichen Linienpaare müßten von zwei Netzebenen herrühren, die praktisch denselben Netzebenenabstand haben wie die $(1\bar{1}01)$ -Netzebene, deren Millersche Indizes für die c-

Achse aber etwas verschieden sind, und zwar derart, daß ihre Netzebenen, symmetrisch zur $(1\bar{1}01)$ -Ebene liegend, jeweils einen Winkel von etwa 30 Minuten mit ihr bilden.

Eine Netzebenenschar, die unter einem Winkel von 30 Minuten gegen die $(1\bar{1}01)$ -Ebene verläuft, ist nur denkbar bei geringer Besetzungsdichte und sehr



$(1\bar{1}01)$

Abb. 32. Unsymmetrischer Anschuß von $(1\bar{1}01)$.
Dicke ~ 900 ÅE. Strahlspannung 53 kV

kleinem Netzebenenabstand. Die Bandbreite der fraglichen Linienpaare verlangt aber praktisch denselben Netzebenenabstand wie für die $(1\bar{1}01)$ -Netzebene, und dies ist bei der normalen Gitteranordnung schlechthin unmöglich. Es bleibt somit offen, wie das Zustandekommen der beiden beobachteten Reflexe zu erklären ist.

C. Beobachtungen bei Mehrstrahlkopplung

PbJ_2 , das sich durch stark dynamische Wirkungen auszeichnet, zeigt bei gleichzeitiger Anregung von mehreren Reflexen starke Kopp-

plungserscheinungen. Einige interessante Beobachtungen dieser Art sollen hier beschrieben werden.

In der Aufnahme Abb. 33 sind die Bänder $(1\bar{2}10)$, $(2\bar{0}21)$, $(1\bar{2}31)$ und $(3\bar{2}11)$ in ihrer Durchkreuzungsstelle symmetrisch angeschossen. Die eingestrahlte Intensität wird in die umliegenden acht intensiven Reflexscheiben umgesteuert, der Primärstrahl ist mit acht Beugungsrichtungen stark verkoppelt. Außerdem sind die Reflexe unter sich verkoppelt, so daß sie nicht nur direkt vom Primärstrahl, sondern auch auf dem Umweg über andere Reflexe angeregt werden. Besonders starke Umweganregung herrscht dort, wo innerhalb einer Reflexscheibe eine Kikuchi-Linie verläuft. Erstaunlicherweise wird in den Sekundärscheiben, die durch Reflexion an den besonders stark arbeitenden Netzebenen $(1\bar{2}10)$ bzw. $(2\bar{0}21)$ entstehen, das Streifensystem der Nebenminima und Nebenmaxima nicht durch diese Richtungen bestimmt, die Streifen orientieren sich vielmehr nach den Umwegreflexen $(1\bar{2}31)$ und $(3\bar{2}11)$. Im Primärfleck finden wir entsprechend als Streifensystem ein Kreuzmuster, das von denselben Richtungen beherrscht wird.

Dasselbe Verhalten beobachtet man auch in der Aufnahme Abb. 34, wo eine Bandkante von $(2\bar{0}21)$ angesteuert wurde. In der Sekundärscheibe $(2\bar{0}21)$ fehlen wieder die Nebenminima und Nebenmaxima dieser Richtung, ja sogar das Hauptmaximum, die Kikuchi-Linie tritt nicht auf. Wir beobachten ein sich

kreuzendes Streifensystem, das wiederum vorherrschend nach den $(1\bar{2}31)$ - und $(3\bar{2}\bar{1}1)$ -Richtungen ausgerichtet ist und ein rautenförmiges Bild zeigt. In der

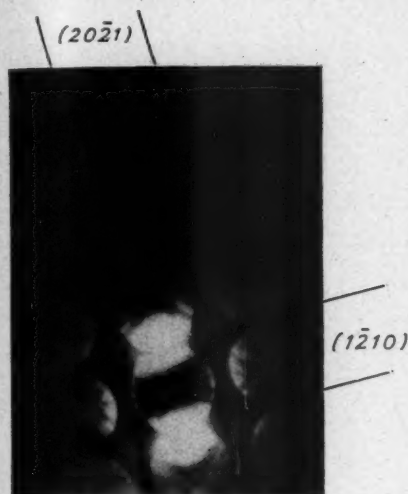


Abb. 33. Symmetrische Einstrahlung in die $(1\bar{2}10)$ - und $(20\bar{2}1)$ -Bänder. Dicke ~ 1100 ÅE. Strahlspannung 44 kV

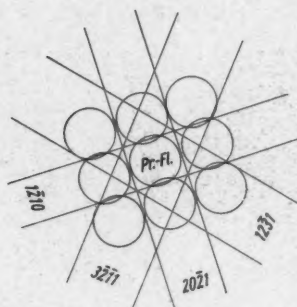


Abb. 33a. Schema zur Abb. 33



Abb. 34. Einstrahlung in die Bandkante von $(20\bar{2}1)$. Dicke ~ 1100 ÅE. Strahlspannung 50 kV

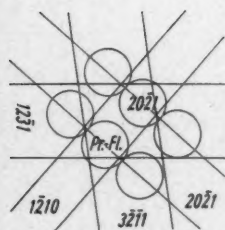


Abb. 34a. Schema zur Abb. 34

Aufnahme Abb. 35 wurde in derselben Richtung mit einem Primärkegel größerer Öffnung eingestrahlt. Man sieht, daß in der Sekundärscheibe $(20\bar{2}1)$ zu beiden Seiten außerhalb des $(1\bar{2}10)$ -Bandes die $(20\bar{2}1)$ -Streifen sich in gewohnter Weise

durchsetzen, daß aber beim Eintritt in das $(\bar{1}\bar{2}10)$ -Band die Kikuchi-Linie $(20\bar{2}1)$ aussetzt, bzw. eine Umbiegung in die $(12\bar{3}1)$ - und $(3\bar{2}\bar{1}1)$ -Richtungen erfährt.

Besonders starke Kopplungserscheinungen zeigt die Aufnahme Abb. 36. Der Kristall ist beinahe senkrecht angeschossen. In dem dazugehörigen Schema Abb. 36a sind die sechs stärksten Sekundärscheiben skizziert. Wir beobachten in den Reflexscheiben $(\bar{2}110)$ und $(11\bar{2}0)$ merkwürdig deformierte keulenartige Strukturen in verschiedenen Richtungen. Weiter fällt auf, daß in der Mitte des „Sterns“ ein intensitätsarmer Bereich vorliegt. Ganz deutlich wird dies bei der senkrechten Einstrahlung in der Aufnahme Abb. 37. Das Fehlen der Intensität

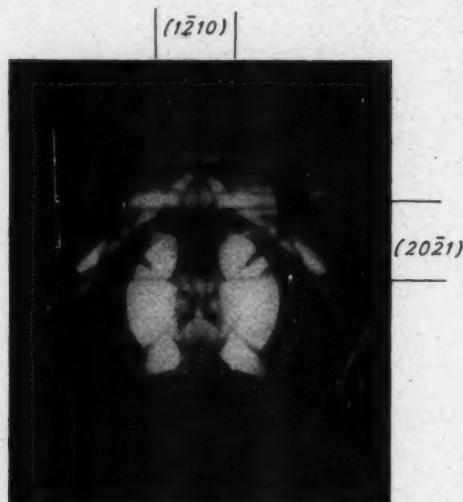


Abb. 35. Dieselbe Einstrahlung wie in Abb. 34 mit Primärkegel größerer Öffnung. Dicke ~ 900 ÅE. Strahlenspannung 51 kV

Einstrahlrichtungen, die der Umgebung des Sechsecks in Abb. 37a entsprechen, im wesentlichen in Richtungen reflektiert wird, die wieder in die Umgebung des Sechsecks fallen.

Die Sekundärscheiben, die alle durch Reflexion über die schmalen Bänder zustande kommen, zeigen Nebenminima- und Nebenmaxima-Streifen in Richtung der breiten Bänder. Auch in dem hellen Ring sind die kranzförmig verlaufenden Streifen nach diesen Richtungen orientiert.

Abb. 2 zeigt dasselbe bei einer Präparatdicke von etwa 2000 ÅE.

D. Zusammenfassung

Es werden in Kap. A zu einer von I. Ackermann erstmals an PbJ_2 gefundenen Ausfallerscheinung, einer Intensitätsanomalie bei der Überkreuzung von 3 Kiku-

in der Sternmitte, wo die ganze Primärstrahlintensität angeboten wird, kann wohl durch die Vielzahl der Reflexionsmöglichkeiten, die für diesen Bereich gegeben sind, verständlich gemacht werden²⁹⁾. Der Primärfleck, der sich kaum noch abhebt, wird bei dieser hochsymmetrischen Einstrahlung über die schmalen Bänder in sechs Sekundärscheiben umgesteuert, die untereinander stark verknüpft sind. Außerdem beobachtet man einen sehr intensiven Ring mit einem Kranz von Streifen, der sich um das Intensitätsloch im Zentrum herumlegt und in der Umgebung des in Schema Abb. 37a verstärkt gezeichneten Sechsecks verläuft. Dieser helle Ring ist augenscheinlich darauf zurückzuführen, daß für

²⁹⁾ Abb. 31 zeigt Ähnliches in der Überkreuzungsstelle der $(1\bar{1}01)$ - und $(11\bar{2}0)$ -Bänder.

chi-Linienpaaren, weitere Beobachtungen gebracht. Die gefundenen Ausfallreflexe sind in Tabelle 1 zusammengestellt und die Lage der Ausfallstellen ist im Netzebenen-Schema Abb. 24 wiedergegeben.

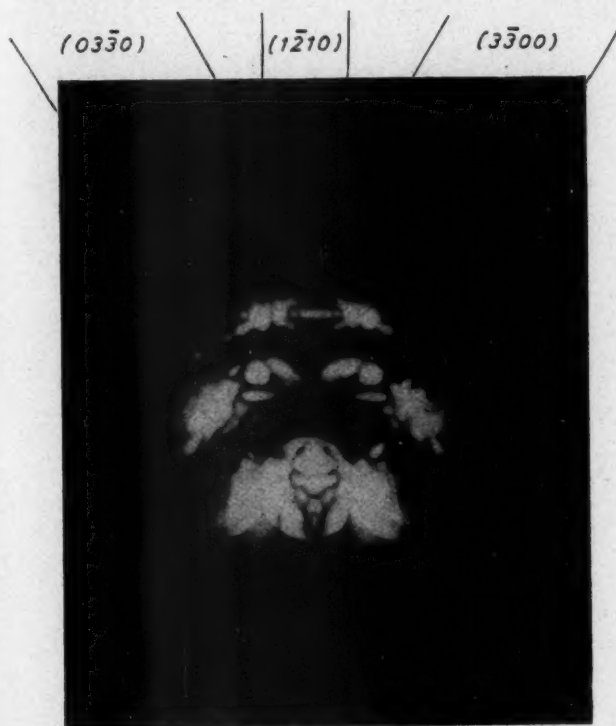


Abb. 36. Annähernd senkrechte Einstrahlung. Dicke ~ 1100 ÅE. Strahlspannung 47 kV

Wie bei den von C. Menzel-Kopp an Glimmer beobachteten Intensitätsanomalien ist auch hier in allen Fällen Umweganregung gegeben.

An Hand der Ausbreitungsfläche kann der Intensitätssprung beim Überkreuzen des Störreflexes auf einen Phasensprung des ausfallenden Reflexes um π zurückgeführt werden. Der direkte Reflex und der Umwegreflex sind innerhalb des Störbandes in Phase, sie unterstützen sich, und außerhalb in Gegenphase, sie schwächen sich.

In Kap. B werden Reflexe beschrieben, die sich nicht ohne weiteres in den Rahmen der gewohnten Betrachtungsweise einordnen lassen.

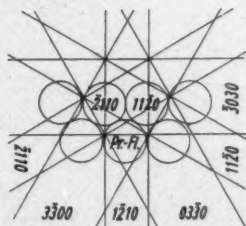


Abb. 36a. Schema zur Abb. 36

1. Bei senkrechter Einstrahlung verläuft in der Mitte der schmalen Zentralbänder $(1\bar{2}10)$, $(11\bar{2}0)$ und $(\bar{2}110)$ eine intensitätsreiche helle Linie und zu beiden

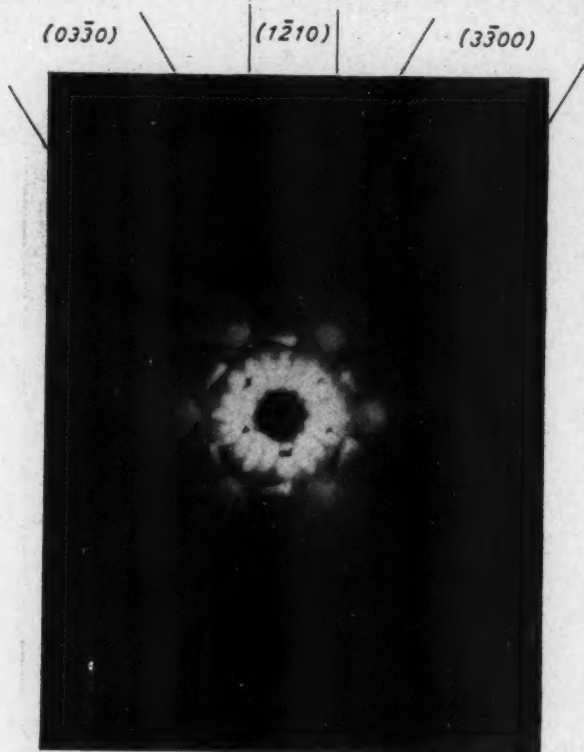


Abb. 37. Senkrechte Einstrahlung. Präparatdicke ~ 1100 ÅE. Strahlenspannung 51 kV

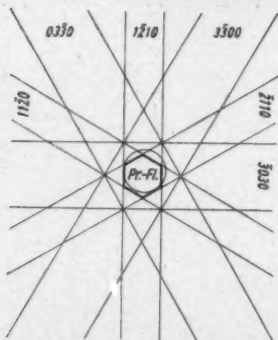


Abb. 37a. Schema zur Abb. 38

Seiten zwischen den Kikuchi-Linien 1. und 2. Ordnung eine dunkle Linie.

2. Für das schmale Zentralband beobachtet man bei Dicken um 600 ÅE, daß die Intensität für eine von der Bragg-Richtung abweichende Richtung besonders stark umgesteuert wird. Man könnte annehmen, daß ein Nebenminimum in die Bragg-Richtung eingerückt ist und für das folgende Nebenmaximum am stärksten reflektiert wird. Völlig ungeklärt bleibt aber die Beobachtung, daß die beiden Intensitätsstufen im Primärfleck, die durch die stark arbeitende Richtung gegeneinander abgegrenzt sind, in der

Sekundärscheibe nicht komplementär, sondern in derselben Weise wieder auftreten.

3. An Stelle des zu erwartenden ($1\bar{1}01$)-Bandes findet man symmetrisch dazu zwei direkt nebeneinander liegende gleich breite Bänder. Für die normale Kristallstruktur sind diesen beiden Bändern keine entsprechenden Netzebenen zugeordnet, sie können nicht indiziert werden.

In Kap. C wird auf bemerkenswerte Kopplungserscheinungen hingewiesen, die bei gleichzeitiger Anregung von mehreren starken Reflexen auftreten.

Die Einstrahlung im Stern bzw. in der Überkreuzungsstelle von ($1\bar{2}10$) und (2021) beherrscht ein gemeinsamer Zug. Sowohl im Primärfleck, als auch in den Sekundärscheiben, die durch Reflexion über die schmalen, besonders stark arbeitenden Bänder hervorgehen, finden wir eine Orientierung der Nebenminima- und Nebenmaxima-Streifen nach den breiten Bändern, durch die die Sekundärscheiben miteinander verkoppelt sind und über die Umweganregung gegeben ist.

Bei senkrechter Einstrahlung beobachtet man im Zentrum des „Sterns“ ein Intensitätsloch, das von einem sehr intensiven Ring mit radialer Streifenstruktur umgeben ist.

Herrn Prof. Dr. W. Kossel möchte ich für sein förderndes Interesse und viele wertvolle Anregungen meinen besonderen Dank aussprechen.

Tübingen, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. Juni 1952.)

Zur Theorie irreversibler Vorgänge. I

Von Helmut G. Reik

Inhaltsübersicht

Es wird eine Funktion s definiert durch drei Forderungen:

- a) Sie soll eine Funktion der thermodynamischen Zustandskoordinaten sein.
- b) Bei der Anwendung der Funktion auf spezielle Probleme darf niemals ein Widerspruch zum ersten Hauptsatz auftreten.
- c) Schließlich wird die Funktion s durch eine Beziehung zwischen ihr und der Zeit definiert.

Diese Beziehung soll sämtliche Zeitgesetze der irreversibel ablaufenden Vorgänge repräsentieren. Sie ist die eigentliche Definitionsgleichung für s . Die Funktion s wird also durch den Ablauf der irreversibeln Vorgänge bestimmt.

Durch diese drei Forderungen ist die Funktion s vollständig eindeutig als Funktion der Zustandskoordinaten bestimmt. Das Schema der Differentialgleichungen für s ist identisch mit dem bekannten für die Entropie.

Es wird also gezeigt, daß sich die Entropie bei irreversibeln Vorgängen als Funktion der Zeit erweist und daß die klassische Entropiedefinition zu eng ist, weil sie nur die Abhängigkeit der Entropie von den Zustandskoordinaten richtig wiedergibt, über die zeitliche Abhängigkeit aber nichts aussagt.

Daraus ergibt sich des weiteren, daß der Begriff der Zustandsfunktion auch auf Glieder irreversibler Folgen, d. h. auch auf Nichtgleichgewichtszustände angewendet werden darf.

§ I. Einleitung

Die klassische Thermodynamik liefert uns sehr leistungsfähige Methoden zur Bestimmung von Gleichgewichten, d. h. Endzuständen von Vorgängen, die von bekannten Nichtgleichgewichtszuständen zur Zeit $t = 0$ ihren Ausgang nehmen.

Die Ermittlung der Gleichgewichte erfolgt sehr einfach durch Feststellung der Zustandskoordinaten, für die, ein adiabatisches System vorausgesetzt, die Funktion s ein Maximum annimmt.

Eine quantitative Beschreibung solcher Vorgänge in ihrem zeitlichen Ablauf wäre dann möglich, wenn es gelänge, die Zunahme der Entropie mit dem Fortschreiten der Zeit zu verknüpfen. Da die Entropie nämlich eine Funktion der Zustandskoordinaten ist, wäre damit eine Beziehung zwischen diesen und der Zeitkoordinate geschaffen, mit anderen Worten das Zeitgesetz des Vorganges wäre bekannt.

Der Grund für die Unfähigkeit der klassischen Thermodynamik, durch Weiterentwicklung ihrer Sätze diese Aufgabe zu lösen, liegt darin, daß ihre Ergebnisse durch das Studium reversibler Mechanismen gewonnen werden. Ihre Zustände sind nur dann in ihrem Sinne definiert, wenn sie sich durch reversible Prozesse

aus einem vorgegebenen Standardzustand erzeugen lassen, in der Terminologie Bridgmans¹⁾, „wenn die Zustände von Reversibilität umgeben sind“.

Um das Ziel der Behandlung, die Ermittlung von Zeitgesetzen für irreversible Vorgänge zu erreichen, ist es notwendig, die zu enge klassische Zustandsdefinition zu erweitern. Wir werden in Zukunft einen Zustand — unabhängig davon, in welcher Weise er sich einstellte, und wie er sich zeitlich weiter verändert — allein durch seine Zustandskoordinaten (Druck, Temperatur, chemische Zusammensetzung, Molenbrüche usw.) als definiert betrachten.

Erst die erweiterte Zustandsdefinition läßt den Versuch einer Verknüpfung der Koordinaten eines Zustandes mit der Zeitkoordinate sinnvoll erscheinen.

Wir werden zur Erfüllung unseres Programmes folgendermaßen vorgehen:

Wir verknüpfen eine Funktion der Zustandskoordinaten durch eine mathematische Vorschrift mit der Zeit. Wir ermitteln die Abhängigkeit dieser Funktion von den Zustandskoordinaten durch folgende Bedingungen:

- a) Durch die mathematischen Sätze über Zustandsfunktionen (Integrabilitätsbedingungen usw.).
- b) Durch den ersten Hauptsatz
- c) Durch ihren Zusammenhang mit der Zeit, wie er aus der Definitionsgleichung folgt.

Wir verlangen nämlich, daß diese mathematische Verknüpfung zwischen den thermischen Zustandskoordinaten und der Zeit so beschaffen sein soll, daß sie die Zeitgesetze irreversibler Vorgänge befriedigt. Ohne Zweifel gibt es viele Möglichkeiten, mit jeweils verschieden definierten Funktionen denselben physikalischen Sachverhalt (irreversible Zeitgesetze und thermisches Gleichgewicht) auszudrücken. In der Wahl einer speziellen Verknüpfung (Definitionsgleichung) besteht also noch eine gewisse Freiheit.

Wir haben im folgenden diese Definitionsgleichung so gewählt, daß wir für $t \rightarrow \infty$ den Anschluß an das bisher in der Thermodynamik gebräuchliche Funktionssystem von s , der Entropie und f , der freien Energie erhalten. Abgesehen davon, daß wir damit an die historische Entwicklung anknüpfen, hat das Differentialgleichungssystem, das wir für die Entropie entwickeln, besondere Vorteile; es sei daran erinnert, daß sich in ihm die Einflüsse der kalorischen und der thermischen Zustandsgleichung getrennt berücksichtigen lassen (erstere durch u , letztere durch f) und es leicht möglich ist, die Beziehungen zwischen thermischer und kalorischer Zustandsgleichung zu gewinnen.

Man darf aber nicht übersehen, daß die Entwicklung, die wir hier aus dem Unendlichen für endliche Zeiten an die Funktionen s und f anschließen, eine neue Entwicklung ist, denn wir erwähnten, daß ja irgendeine andere Verknüpfung zwischen Zeit und Zustandskoordinaten, natürlich bewerkstelligt durch eine andere Funktion wie s , der gewählten völlig gleichberechtigt zur Seite steht.

Wir haben also von neuem zu untersuchen, welche Bedeutung zum Beispiel die absolute Temperatur in unserer Theorie hat. Der Leser wird sich also nicht wundern, wenn wir zunächst in dieser Mitteilung die thermodynamischen Formeln gewinnen, auf einem irreversiblen Wege, der von dem der alten Thermodynamik grundsätzlich abweicht. In späteren Mitteilungen werden sich dann auch ganz neue Ergebnisse aus der Theorie gewinnen lassen, die die reversible Thermodynamik überhaupt nicht gewinnen kann.

In § II stellen wir zunächst einige Sätze über Zustandsfunktionen zusammen, und zwar gleich in der Form, in der wir sie dann später gebrauchen.

§ II. Über die thermodynamischen Funktionen

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung der Sätze über Zustandsfunktionen in einer Form, wie wir sie im folgenden benötigen.

¹⁾ Zur Kritik der klassischen Thermodynamik vgl. P. W. Bridgman, *Rev. mod. Physics* 22, 56 (1950); R. C. Tolman and Fine, *Rev. mod. Physics* 20, 51 (1948).

Es soll versucht werden, eine Funktion aufzustellen, die in eindeutiger Weise von den Zustandskoordinaten des betrachteten thermodynamischen Systems abhängt.

Die Bedingung dafür, daß die gesuchte Funktion eine Funktion des Ortes im Zustandsraum sei, lautet:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial s}{\partial v} dv + \sum_1^n \frac{\partial s}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{II, 1})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial \tau \partial v} &= \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial \tau}; & \frac{\partial^2 s}{\partial \tau \partial x_i} &= \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial v} &= \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial x_i}; & \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_k} &= \frac{\partial^2 s}{\partial x_k \partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II, 2})$$

Dabei bedeutet τ die konventionelle Temperatur, v das Volumen, die einzelnen x_i z. B. elektrische Ladung, Oberflächengröße, Molzahlen von Mischungskomponenten usw.

Man bildet nun das totale Differential der Funktion

$$u = u(\tau, v, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

der inneren Energie. Diese Funktion ist, wie wir wissen, stetig und differenzierbar. Die zwei ersten Ableitungen existieren und sind stetig.

$$du = \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial u}{\partial v} dv + \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{II, 3})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial v} &= \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \tau}; & \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x_i} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v} &= \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial x_i}; & \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II, 4})$$

Man multipliziert die Funktion s mit einer Funktion $\beta(\tau, v, x_i)$, die zunächst wie die Funktionen s und u von sämtlichen Zustandskoordinaten abhängen soll. Ebenso soll die Funktion β stoffabhängig sein, d. h. sie soll verschieden sein für jedes individuelle stoffliche System. Auch die Funktion β soll den Integrabilitätsbedingungen genügen.

Man definiert nun eine neue Funktion

$$f(\tau, v, x_i) = u(\tau, v, x_i) - \beta(\tau, v, x_i) \cdot s(\tau, v, x_i). \quad (\text{II, 5})$$

Durch Gl. (II, 5) wird eine Zuordnung zwischen den Funktionen u , s , f , β hergestellt.

Man differenziert Gl. (II, 5) und erhält:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial s}{\partial \tau} - s \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right] d\tau + \left[\frac{\partial u}{\partial v} - \beta \frac{\partial s}{\partial v} - s \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] dv + \sum_1^n \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} - \beta \frac{\partial s}{\partial x_i} - s \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] dx_i = 0. \quad (\text{II, 6})$$

Aus der Tatsache, daß die in Gl. (II, 6) auftretenden Differentiale die unabhängiger Variabler sind, folgt, daß zur Erfüllung von Gl. (II, 6) sämtliche Klammern verschwinden müssen.

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} - s \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right] \quad (\text{II, 7})$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial v} - s \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] \quad (\text{II, 8})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} - s \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II, 9})$$

Aus (II, 5) folgt auch:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial x_i} - \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial v} - \beta \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial x_i} - \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial v} - s \frac{\partial^2 \beta}{\partial v \partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial v} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial x_i} - \beta \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial v} - \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - s \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial v}.$$

Auf Grund der Tatsache, daß die Funktionen u , s , β integrel sind, folgt, daß auch für f die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial \tau}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial v}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial v}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}. \quad (\text{II, 10})$$

Das Vorgehen im § II war ganz allgemein. Es ist durch keine Definition oder Operation irgend etwas geschehen, was einem Vorwegnehmen irgendeines physikalischen Ergebnisses im mathematischen Teil gleich käme.

Über die Funktionen s , f , β sind noch keine anderen Aussagen gemacht worden als die, daß sie Zustandsfunktionen sein sollen.

Die Formulierung der Funktion f mittels der Funktion u in Gl. (II, 5) geschah lediglich aus Gründen der Darstellung. Der Einfluß von u auf f kann aber, wie leicht einzusehen, durch den Summanden $\beta \cdot s$ wieder aufgehoben werden.

Die Gl. (II, 7, 8, 9) erlauben uns, die Funktion s für jeden, durch seine Zustandskoordinaten definierten Zustand zu berechnen, vorausgesetzt, daß für einen Zustand der Wert von s vorgegeben sei und die partiellen Ableitungen der Funktionen β und f als Funktionen der Zustandskoordinaten bekannt sind. Außerdem muß der Wert der Funktion β für einen Zustand bekannt sein. Die Ermittlung dieser Abhängigkeiten und die Berechnung der Funktion s wird die Aufgabe dieser ersten Mitteilung sein.

§ III. Das Zeitaxiom. Die Ableitung der Formeln des zweiten Hauptsatzes aus dem Zeitaxiom

a) Wir betrachten ein adiabatisch abgeschlossenes thermisches Gesamt-System, dessen Zustandskoordinaten sämtlich bekannt sind, so daß sein Zustand eindeutig feststeht.

Wenn wir also im folgenden genötigt sind, Vorgänge zu betrachten, die nicht adiabatisch verlaufen, z. B. chemische Reaktionen, die mit Wärmeentwicklung bzw. Wärmeverbrauch verbunden sind, so müssen wir zu dem nicht adiabatischen System, in dem der Vorgang abläuft, stets noch ein weiteres betrachten, die Umgebung, die als Wärmebehälter fungiert. Beide Systeme zusammen bilden erst das adiabatische System, von dem im folgenden stets die Rede sein soll (das Gesamtsystem), während zwischen den Teilsystemen Wärmeaustausch durchaus möglich ist.

Ein Beispiel eines adiabatischen Systems ist zum Beispiel die Kombination eines Wärmebehälters bei der Temperatur τ_1 , eines zweiten bei der Temperatur τ_2 , und einer Maschine, die zwischen diesen beiden Wärmebehältern zu arbeiten vermag.

Gerade bei nicht adiabatischen Vorgängen ist es sehr nützlich, die Umgebung mit in Betracht zu ziehen, also durch Hinzunahme eines weiteren nicht adiabatischen Teilsystems ein Gesamtsystem zu konstruieren, das adiabatisch ist. Verläuft nämlich ein irreversibler Vorgang in dem einen Teilsystem und bringt man dies nach Beendigung des Vorganges wieder in seinen Ausgangszustand zurück, so kann die Umgebung nicht gleichzeitig auch wieder in ihren Ausgangszustand zurückgebracht werden.

Wir suchen nun eine neue Funktion s , von der wir eine Reihe von Eigenschaften verlangen: Die erste dieser Eigenschaften ist, daß sie nur von den Zustandskoordinaten unseres adiabatisch abgeschlossenen Systems abhängt, daß also der Weg, auf dem dieser Zustand eingestellt wurde, auf ihren Zahlenwert für diesen Zustand ohne Einfluß ist. Des ferneren soll sich die Funktion s des Gesamtsystems aus den Funktionen s_i der Teilsysteme additiv zusammensetzen.

In unserem adiabatisch abgeschlossenen System können Veränderungen vor sich gehen. Es kann zum Beispiel eine Reaktion $H_2 + J_2 \rightarrow 2 HJ$ stattfinden. Bei solchen Veränderungen ändern sich die Zustandskoordinaten des Systems, es ändern sich die inneren Energien, die Funktion dieser Zustandskoordinaten sind, und es ändert sich die Funktion s des Gesamtsystems und die Funktionen s_i der Teilsysteme. Es gilt

$$du = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \quad ds = \sum_i \frac{\partial s}{\partial x_i} dx_i.$$

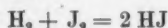
Die Differentiale müssen noch besonderen Forderungen, z. B. den stöchiometrischen Gesetzen Rechnung tragen. Ändern sich z. B. die Molzahlen von HJ , H_2 und J_2 und seien diese

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3,$$

so gilt:

$$du = \frac{\partial u}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial u}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial u}{\partial n_3} dn_3; \quad ds = \frac{\partial s}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial s}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial s}{\partial n_3} dn_3.$$

Auf Grund der Reaktionsgleichung



$$dn_1 = -2 dn_2 = -2 dn_3$$

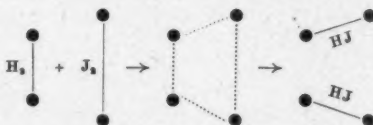
oder bei Einführung der Ullrichschen Reaktionslaufzahlen

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) d\lambda \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = -2 \frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} + \frac{\partial u}{\partial n_3}.$$

b) Die Vorgänge, die wir im folgenden zu behandeln haben, sollen solche sein, bei welchen sich die Zustandskoordinaten relativ langsam ändern und vor allen Dingen solche, bei denen die Zustandskoordinaten in jedem physikalischen Punkt eines bestimmten Bereiches dieselben sind. Zu diesen Vorgängen gehören z. B. chemische Reaktionen, Vorgänge wie Diffusion, Wärmeleitung, innere Reibung usw.

Die Behandlung sehr rasch verlaufender Vorgänge, bei denen der „Zustand“ sich in sehr kleinen räumlichen Bereichen sprunghaft ändert, läßt sich mit unseren Methoden nicht erreichen. Die im folgenden zu betrachtenden Vorgänge verlaufen von einem bestimmten Anfangszustand ausgehend über einen Zwischenzustand zum Endzustand.

Für das Beispiel der Jodwasserstoffreaktion gilt



Man kann das auch so schreiben:



Für die erste Gleichung gilt bei Fortschreiten der Reaktion um $\lambda = 1$

$$\Delta s_1 = \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)^* - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_{H_2+J_2}.$$

Für die zweite Gleichung gilt:

$$\Delta s_2 = \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)^* - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_{2HJ}.$$

Für die Behandlung der im Voranstehenden beschriebenen langsamen Vorgänge wird folgendes gefordert:

Alle bezeichneten Vorgänge verlaufen stets so, daß im adiabatischen System gilt:

$$\int_{c_0}^{c_t} \frac{dc}{\mu \left[e \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_0 - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1}{R} - e \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)^* - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2}{R} \right]} = -t. \quad (III, 1)$$

Dabei ist t die Zeitkoordinate, c die in der Zeit sich verändernde unabhängige Zustandskoordinate, c_0 ihr Wert zur Zeit $t = 0$, c_t ihr Wert zur Zeit t .

μ ist die Übergangsfunktion, auf die erst in der zweiten Mitteilung eingegangen wird.

$\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)^*$ ist die Änderung der Funktion s für den Zwischenzustand. $\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1$ bzw. $\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2$ sind die entsprechenden Änderungen für die Stoffe des Anfangs- bzw. Endzustandes, bezogen auf $\lambda = 1$, d. h. auf einen Formelumsatz.

Wie aus der Gl. (III, 1) hervorgeht, gilt sie für die zeitliche Veränderung einer unabhängigen Zustandsvariablen. Ändern sich mehrere Zustandsvariablen mit der Zeit, so ist für jede dieser Variablen Gl. (III, 1) besonders anzusetzen.

Die Gl. (III, 1) nennen wir im folgenden das Zeitaxiom. Dieses Zeitaxiom stattet die Funktion s , die wir im § II bereits durch Forderungen definiert haben, mit weiteren Eigenschaften aus. Diese neuen Eigenschaften, verbunden mit den bereits vorhin zugeschriebenen, bestimmen die Funktion s als Funktion der Zustandskoordinaten vollständig und eindeutig. Das Zeitaxiom verlangt nämlich, daß die Funktion s so von den Zustandskoordinaten abhängt, als es nötig ist, um z. B. aus Gl. (III, 1) das Zeitgesetz des Jodwasserstoffzerfalls zu erhalten, allgemein das Zeitgesetz jedes physikalischen Vorganges, vorausgesetzt, daß man in Gl. (III, 1) die jeweils für den Spezialfall zutreffenden Ausdrücke einsetzt und vorausgesetzt, daß uns die Funktion μ bekannt sei.

Mit anderen Worten: Die Funktion s wird durch den zeitlichen Ablauf der Naturgesetze bestimmt, sie bildet ein Maß dafür, in welcher (einsinnigen) Richtung die Naturvorgänge verlaufen. Es erscheint daher angebracht, für diese Funktion den Namen Entropie beizubehalten.

Wir bestimmen im folgenden die Abhängigkeit der Funktion s , der Entropie, von den Zustandskoordinaten. Wir haben dazu drei Bedingungen:

- a) Das Zeitaxiom.
- b) Die Gleichungen des § II.
- c) Den ersten Hauptsatz.

Diese Bedingungen bestimmen, wie erwähnt, die Entropie als Funktion der Zustandskoordinaten vollständig. Wir können aus der Entropie des weiteren eine Reihe von Ergebnissen und thermodynamischen Formeln gewinnen, die man

bisher aus dem zweiten Hauptsatz (in Verbindung mit dem ersten) erhalten hat. Das Zeitaxiom spielt beim Ableiten dieser Formeln die Rolle des zweiten Hauptsatzes. Es läßt sich direkt zeigen, daß der zweite Hauptsatz im Zeitaxiom enthalten ist.

Es zeigt aber Gl. (III, 1), daß das Zeitaxiom wesentlich allgemeiner ist. Es wird ja jetzt die Entropie durch eine Beziehung bestimmt, in der die Zeit vorkommt, also aus einer Beziehung, die einen einsinnigen Charakter, einen irreversibeln Charakter besitzt, während die zu enge klassische Entropiedefinition

$$ds = \frac{dQ_{\text{reversibel}}}{T}$$

der Entropie einen nicht gerichteten, reversibeln Charakter zuschrieb.

Wenn wir im Zeitaxiom die jetzt im folgenden zu gewinnenden Ausdrücke für die Entropie einsetzen, so erhalten wir für endliche Werte von t das Zeitgesetz des irreversibel ablaufenden Prozesses, für $t \rightarrow \infty$ die Formel für das thermodynamische Gleichgewicht.

e) Wir schreiben Gl. (III, 1) etwas um:

$$\int_{c_0}^{c_t} \frac{dc}{\mu e^{\frac{(\partial s)}{(\partial \lambda)_2}} \left[e^{\frac{(\partial s)}{(\partial \lambda)_1}} - e^{\frac{(\partial s)}{(\partial \lambda)_2}} \right]} = -t. \quad (\text{III, 1a})$$

Es ist dabei im Hinblick auf die übliche Behandlung der chemischen Reaktionen so eingerichtet, daß c_0 größer als c_t , also daß dc negativ ist, wenn λ größer wird ($\Delta\lambda > 0$).

Es ergibt sich dann aus der Gl., daß für endliche Werte der Zeitkoordinate gilt: ($\mu > 0$)

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2 - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1 > 0; \quad \left[\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2 - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1 \right] \Delta\lambda = \Delta s = s_2 - s_1 > 0.$$

Für $t \rightarrow \infty$ gilt

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2 - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1 = 0,$$

also allgemein:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2 - \frac{\partial s}{\partial \lambda} \geq 0; \quad \left[\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_2 - \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1 \right] \Delta\lambda = \Delta s = s_2 - s_1 \geq 0. \quad (\text{III, 2})$$

In Worten ausgedrückt heißt dies:

Die Entropie kann im Verlaufe eines Vorganges im adiabatischen System nur größer werden. Es ist unmöglich, daß sie kleiner wird.

Ein Beispiel möge dies erläutern. Wir betrachten eine chemische Reaktion $A + B \rightarrow C + D$ und schreiben für sie

$$\int_{c_0}^{c_t} \frac{dc}{\mu e^{\frac{(\partial s)}{(\partial \lambda)_2}} \left[e^{\frac{(\partial s)}{(\partial \lambda)_1}} - e^{\frac{(\partial s)}{(\partial \lambda)_2}} \right]} = -t.$$

c sei dabei die Konzentration des Stoffes A . $-\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_1$ ist die Abnahme der Entropie des Systems bei Fortschreiten der Reaktion um einen Formelumsatz, verursacht durch

das Verschwinden von einem Mol A und einem Mol B . $\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_2$ ist die entsprechende Zunahme der Entropie des Systems, verursacht durch die mit Fortschreiten der Reaktion um einen Formelumsatz $\lambda = 1$ stattfindende Entstehung von einem Mol C und einem Mol D .

Solange

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_1 < \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_2, \quad (\text{III, 3})$$

findet die Reaktion im Sinne wachsenden λ d. h. im Sinne abnehmender Konzentration c statt. Die Entropie des Systems wächst dabei. Für $t \rightarrow \infty$ wird das Gleichgewicht erreicht. Wenn aber

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_1 > \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_2 \quad (\text{III, 3a})$$

dann wird der Nenner negativ, die Reaktion verläuft unter Entropievermehrung von rechts nach links, also im Sinne abnehmenden λ und dementsprechend im Sinne zunehmenden c .

d) Um in der Ermittlung der Funktion s weiterzukommen, lassen wir in unserem adiabatisch abgeschlossenen System folgenden Vorgang verlaufen:

Wir entnehmen dem Wärmebehälter A , dessen Temperatur wir im folgenden mit τ_A bezeichnen, eine bestimmte Wärmemenge. Diese ist

$$Q_1 = C_{vA} d\tau_A. \quad (\text{III, 4})$$

Da $d\tau_A$ negativ ist, ist die Wärmemenge negativ, denn der Wärmebehälter hat sie verloren.

Diese Wärmemenge möge unsere Maschine, die sich bei derselben Temperatur befindet, aufnehmen, wobei sie Arbeit leistet. Sie soll sich anschließend adiabatisch unter Arbeitsleistung ausdehnen, bis sie die Temperatur τ_B des Wärmebehälters B erreicht hat. Daraufhin findet eine isotherme Kompression des Arbeitsstoffes statt, wobei dem Wärmebehälter B eine Wärmemenge Q_2 zugeführt wird. Diese ist

$$Q_2 = C_{vB} d\tau_B. \quad (\text{III, 5})$$

Da $d\tau_B > 0$ ist auch $Q_2 > 0$, denn der Wärmebehälter erhält die Wärmemenge.

Anschließend wird die Maschine durch adiabatische Kompression wieder in ihren Anfangszustand gebracht.

Durch diesen Vorgang wurde dem Wärmebehälter A die Wärmemenge $|Q_1|$ entzogen, dem Wärmebehälter B die Wärmemenge $|Q_2|$ zugeführt. Es haben sich also die Zustandskoordinaten von A und B geändert, die Zustandskoordinaten der Maschine sind gleich geblieben. Es muß sich also auch die Funktion s des Systems geändert haben.

Durch Einsetzen in Gl. (II, 7) erhalten wir als Entropieänderung von A

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s_A}{\partial \tau}\right) d\tau_A &= \frac{1}{\beta_A} \left[C_{vA} d\tau_A - \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A \right] \\ d s_A &= \frac{1}{\beta_A} \left[Q_1 - \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A \right]. \end{aligned} \quad (\text{III, 6})$$

Für die Entropieänderung von B folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s_B}{\partial \tau}\right) d\tau_B &= \frac{1}{\beta_B} \left[C_{vB} d\tau_B - \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B \right] \\ d s_B &= \frac{1}{\beta_B} \left[Q_2 - \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B \right]. \end{aligned} \quad (\text{III, 7})$$

Die Indices A und B sollen andeuten, daß β_A, s_A, f_A Funktionen der Zustandskordinaten von A , β_B, s_B, f_B solche der Zustandskordinaten von B sind.

ds_A ist die Entropieänderung von A , ds_B die Entropieänderung von B . Da das System Wärmebehälter A -Maschine-Wärmebehälter B während des ganzen Vorganges adiabatisch isoliert war, gilt für die Entropie dieses Systems auf Grund der aus dem Zeitaxiom folgenden Gl. (III, 2)

$$ds_A + ds_B \geq 0.$$

Das heißt aber

$$\frac{1}{\beta_A} \left[Q_1 - \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A \right] + \frac{1}{\beta_B} \left[Q_2 - \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B \right] \geq 0$$

oder

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{\beta_B}{\beta_A} + \frac{1}{Q_1} \left[\frac{\beta_B}{\beta_A} \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A + \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B \right], \quad (\text{III, 8})$$

da Q_1 negativ ist.

Wir denken uns jetzt noch einen dritten Wärmebehälter C und lassen unsere Maschine zwischen dem Wärmebehälter A und dem Wärmebehälter C und dann zwischen dem Wärmebehälter B und C arbeiten. C habe die niedrigste Temperatur. Man erhält:

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{\beta_C}{\beta_A} + \frac{1}{Q_1} \left[\frac{\beta_C}{\beta_A} \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A + \left(\frac{\partial \beta_C}{\partial \tau} s_C + \frac{\partial f_C}{\partial \tau} \right) d\tau_C \right] \quad (\text{III, 9})$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{\beta_C}{\beta_B} + \frac{1}{Q_1} \left[\frac{\beta_C}{\beta_B} \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B + \left(\frac{\partial \beta_C}{\partial \tau} s_C + \frac{\partial f_C}{\partial \tau} \right) d\tau_C \right]. \quad (\text{III, 10})$$

Dabei ist zu beachten, daß die im Zähler der Gln. (III, 8, 9, 10) stehenden Wärmemengen den jeweils niedriger temperierten Wärmebehältern zukommen, die im Laufe des Prozesses Wärme erhalten. Diese Wärmemengen sind jeweils positiv, die im Nenner, die jeweils einem Wärmeverlust des höher temperierten Wärmebehälters entsprechen, sind jeweils negativ.

Wir transportieren nun in einem weiteren Transport Wärme vom Behälter A mittels unserer Maschinen zunächst nach B , nehmen dieselbe Wärmemenge mit unserer Maschine wieder restlos auf und transportieren sie zum Wärmebehälter C . Die Maschine wird anschließend wieder in ihre Ausgangsstellung gebracht. Der Zustand des Wärmebehälters B ist gegenüber seinem Anfangszustand nicht verändert worden.

Auf den Gesamtprozeß-Transport von Wärme von A nach C , ist Gl. (III, 9) anzuwenden.

Auf den ersten Teilprozeß haben wir aber die Gl. (III, 8), auf den zweiten Gl. (III, 10) anzuwenden.

Um aus (III, 8) und (III, 9) den Ausdruck für

$$\frac{Q_2}{Q_1}$$

zu erhalten, muß man beachten, daß Q_2 in Gl. (III, 10) negativ ist (denn dort fungiert der Behälter B als der wärmeabgebende Behälter), während Q_2 in Gl. (III, 8) positiv ist, denn dort empfängt der Behälter B Wärme.

Die Beträge von Q_2 in den Gl. (III, 8, 10) sind nach Voraussetzung gleich.

Wir multiplizieren die Gl. (III, 8) mit -1 , wobei zu beachten ist, daß das Ungleichheitszeichen umgekehrt wird.

$$-\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{\beta_B}{\beta_A} - \frac{1}{Q_1} \left[\frac{\beta_B}{\beta_A} \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A + \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B \right]. \quad (\text{III, 8a})$$

$$-Q_2 (\text{III, 8}) = Q_2 (\text{III, 10}).$$

Wir dividieren nun Gl. (III, 9) durch Gl. (III, 8a) und erhalten:

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{-\frac{\beta_C}{\beta_A} + \frac{1}{Q_1} \left[\frac{\beta_C}{\beta_A} \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A + \left(\frac{\partial \beta_C}{\partial \tau} s_C + \frac{\partial f_C}{\partial \tau} \right) d\tau_C \right]}{\frac{\beta_B}{\beta_A} - \frac{1}{Q_1} \left[\frac{\beta_B}{\beta_A} \left(\frac{\partial \beta_A}{\partial \tau} s_A + \frac{\partial f_A}{\partial \tau} \right) d\tau_A + \left(\frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} s_B + \frac{\partial f_B}{\partial \tau} \right) d\tau_B \right]}. \quad (\text{III, 11})$$

Diese Gleichung muß identisch sein mit der Gl. (III, 10). Außerdem darf Gl. (III, 11) nicht mehr von den Zustandskoordinaten von A abhängen. Dies ist immer dann der Fall, wenn ganz allgemein gilt:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} s + \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0. \quad (\text{III, 12})$$

Wir erhalten so:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{\beta_B}{\beta_A}; \quad \frac{Q_3}{Q_1} = -\frac{\beta_C}{\beta_A}; \quad \frac{Q_3}{Q_2} = -\frac{\beta_C}{\beta_B}$$

oder nach einer kleinen Umänderung:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \leq \frac{\beta_A - \beta_B}{\beta_A} \quad (a); \quad \frac{Q_1 + Q_3}{Q_1} \leq \frac{\beta_A - \beta_C}{\beta_A} \quad (b); \quad \frac{Q_2 + Q_3}{Q_2} \leq \frac{\beta_B - \beta_C}{\beta_B} \quad (c). \quad (\text{III, 13})$$

Wir wollen jetzt lediglich Gl. (III, 13a) betrachten, alles Ausgeführte gilt natürlich sinngemäß auch für Gl. b und c.

Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist hier definiert durch

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}.$$

Beispiel:

$$Q_1 = -20 \text{ kcal}, \quad Q_2 = 15 \text{ kcal}$$

$$\eta = \frac{-20 + 15}{-20} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Die Gl. (III, 13a) stellt eine Ungleichung für den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine dar, die zwischen zwei Wärmebehältern A und B arbeitet. Nun wissen wir aus dem ersten Hauptsatz, daß weder Energie verloren gehen, noch Energie gewonnen werden kann, mit anderen Worten der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine muß größer als null und kleiner als eins sein. Die Grenzen null und eins sind nach dem ersten Hauptsatz ebenfalls erlaubte Werte für η .

Daraus folgt für die Funktionen β , daß

$$0 \leq \frac{\beta_B}{\beta_A} \leq 1; \quad 0 \leq \eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \leq \frac{\beta_A - \beta_B}{\beta_A} \leq 1, \quad (\text{III, 13a})$$

das heißt mit anderen Worten die beiden Funktionen β_A und β_B haben einen Wertevorrat, der in beiden Fällen entweder auf die positive oder die negative reelle Achse beschränkt ist. Ferner muß $\beta_A > \beta_B$ d. h. die Funktion β des höher temperierten Wärmebehälters besitzt den größeren Betrag. Damit folgt aus Gl. (III, 13a):

Der Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine ist kleiner oder höchstens gleich einer Zahl, die selbst kleiner als eins ist, d. h. es wird stets die endliche Wärmemenge Q_2 an den Wärmebehälter mit der niedrigeren Temperatur abgegeben. Dies kann auch anders formuliert werden.

Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine zu ersinnen, die nichts weiter bewirkt, als Abkühlung eines Wärmebehälters und Hebung einer Last.

Dies ist aber die Plancksche Formulierung des zweiten Hauptsatzes, die wir unserem Programm entsprechend aus dem Zeitaxiom gewonnen haben.

e) Wir schreiten in unserem Programm, der Ableitung der Ergebnisse des zweiten Hauptsatzes mit Hilfe des Zeitaxioms, weiter fort und beschäftigen uns als nächstes mit der Temperatur, ihrem Begriff und ihrem absoluten Wert. Mit Gl. (III, 12) schreibt sich Gl. (II, 7)

$$\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial \tau}}{\frac{\partial s}{\partial \tau}}. \quad (\text{III, 14})$$

Die Voraussetzungen, die wir im § II über β gemacht haben, seien nochmals kurz wiederholt:

Die Funktion β ist eine Funktion der Zustandskoordinaten. Sie soll für jeden Stoff individuell verschieden sein. Wir wollen nun sehen, inwieweit der physikalische Teil von diesen Voraussetzungen Gebrauch macht, und inwieweit das Zeitaxiom sie unter vollständiger Bestimmung von β einschränkt.

Wir denken uns dazu unser System bei einer bestimmten reproduzierbaren Temperatur, z. B. der des schmelzenden Eises oder des schmelzenden Wismuts.

Wir bleiben mit unserem System in dem einmal gewählten Temperaturbad, beschreiben aber die Temperatur mit Hilfe anderer konventioneller Skalen, z. B. mittels der Reaumurischen ϑ , der Fahrenheitskala λ oder irgendeiner anderen r . Die Funktionen β_τ , β_ϑ , β_λ , β_r werden analytisch ganz andere Ausdrücke ergeben als bisher. Wir werden haben

$$\beta_\vartheta = \frac{\frac{\partial u}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial s}{\partial \vartheta}}; \quad \beta_\lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial \lambda}}{\frac{\partial s}{\partial \lambda}}; \quad \beta_r = \frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\frac{\partial s}{\partial r}}. \quad (\text{III, 15})$$

Man muß aber beachten, daß

$$\begin{aligned} \beta_\vartheta &= \frac{\frac{\partial u}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial s}{\partial \vartheta}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\vartheta}}{\frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\vartheta}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \tau}}{\frac{\partial s}{\partial \tau}} = \beta_\tau \\ \beta_\lambda &= \frac{\frac{\partial u}{\partial \lambda}}{\frac{\partial s}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\lambda}}{\frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\lambda}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \tau}}{\frac{\partial s}{\partial \tau}} = \beta_\tau \\ \beta_\tau &= \beta_\vartheta = \beta_\lambda = \beta_r. \end{aligned} \quad (\text{III, 16})$$

Es folgt daraus, daß die Funktion β eines Stoffes bzw. eines Systems unabhängig von der gewählten konventionellen Temperaturskala bei gleichen äußeren Bedingungen denselben Zahlenwert besitzt.

Des weiteren nehmen wir folgende Überlegung vor: Es möge der Fall mehrerer voneinander getrennter stofflicher Systeme, die mit Ausnahme der Temperatur (der des schmelzenden Wismuts), die in allen Fällen dieselbe sei, völlig verschiedene Zustandskoordinaten besitzen.

Diese verschiedenen Systeme betrachten wir als Gesamtsystem und schreiben dafür

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \quad (\text{III, 17})$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n \quad (\text{III, 18})$$

Man differenziert Gl. (III, 17) und (III, 18) partiell nach τ und erhält

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \quad (\text{III, 19})$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial s_1}{\partial \tau} + \frac{\partial s_2}{\partial \tau} + \frac{\partial s_3}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial s_n}{\partial \tau}. \quad (\text{III, 20})$$

Für die linke Seite von (III, 20) gilt auf Grund von (II, 7) und (III, 12)

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (\text{III, 21})$$

Dabei hängt nach Voraussetzung β von sämtlichen Zustandskoordinaten des Gesamtsystems ab.

Für jedes Glied der rechten Gleichungsseite gilt:

$$\frac{\partial s_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial s_2}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tau}; \quad \dots; \quad \frac{\partial s_n}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta_n} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}. \quad (\text{III, 22})$$

Hier hängt β_1 nur von den Zustandskoordinaten des ersten, β_2 usw. nur von den Zustandskoordinaten des zweiten usw. Teilsystems ab. Einzig die Temperatur ist die allen Teilsystemen gemeinsame Zustandskoordinate.

Die Gln. (III, 21) und (III, 22) werden in Gln. (III, 20) eingesetzt.

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \dots + \frac{1}{\beta_n} \frac{\partial u_n}{\partial \tau}. \quad (\text{III, 23})$$

Auf Grund von Gl. (III, 19) folgt

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n. \quad (\text{III, 24})$$

D. h. in Worten: Da die einzelnen Teilsysteme sich in allen ihren Zustandskoordinaten mit Ausnahme der Temperatur unterscheiden, folgt, daß

$$\beta = \beta(\tau) \quad (\text{III, 25})$$

also, daß die Funktion β nur von der Temperatur abhängen kann. Sie ist aber für He und Rh dieselbe bei gleicher Temperatur. Sie ist außerdem unabhängig von den Konventionen. Für β gilt also

$$\beta = \beta(\tau); \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{III, 26})$$

Damit erhält man aus den Gln. (II, 7, 8, 9) (III, 12, 26)

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (\text{III, 27})$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] \quad (\text{III, 28})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]. \quad (\text{III, 29})$$

Wir verweisen auf die Ausführungen am Schluß von § II. Über die Funktion $\beta(\tau)$ haben wir bereits eine Reihe von Informationen gewonnen. Allerdings haben wir noch keinen expliziten Ausdruck für sie. Über die Funktion f wissen wir außer Gl. (III, 12) noch wenig. Vermittels dieser Kenntnisse war es uns schon möglich, das System der Differentialgleichungen (II, 7, 9, 9) sehr zu vereinfachen, wie Gln. III (27, 28, 29) lehren.

Diese Gln. sagen uns, daß wir, um die Entropie für irgendeinen Zustand des Systems berechnen zu können, ihren Wert für einen Standardzustand kennen müssen. Außerdem müssen uns die partiellen Ableitungen der Funktionen u und f als Funktion der Zustandskoordinaten bekannt sein. Wie bisher muß uns auch der Wert der Funktion β für einen Zustand bekannt sein.

1) Wir ermitteln also als nächstes die Abhängigkeit der partiellen Ableitungen der Funktion f von den Zustandskoordinaten. Dazu betrachten wir folgenden Vorgang:

Unsere Maschine entzieht dem Wärmebehälter isotherm Wärme, wobei sie unter Ausdehnung Arbeit leistet. Dann ist:

$$\begin{aligned}\Delta s_{\text{Wärmebehälter}} &= \frac{1}{\beta(\tau)} C_v d\tau = \frac{Q_{\text{Wärmebehälter}}}{\beta(\tau)} & d\tau < 0 \quad Q_w < 0 \\ \Delta s_{\text{Maschine}} &= \frac{1}{\beta(\tau)} \left[\int_{v_1}^{v_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] dv \right] \\ \Delta s_{\text{gesamt}} &= \frac{1}{\beta(\tau)} Q_w + \frac{1}{\beta(\tau)} \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv \geq 0\end{aligned}\quad (\text{III, 30})$$

auf Grund der aus dem Zeitaxiom folgenden Gl. (III, 21). Es gilt nun aber auf Grund des ersten Hauptsatzes, daß die vom Wärmebehälter abgegebene Energie vom Arbeitsstoff der Maschine aufgenommen wird, also

$$Q_{\text{Wärmebehälter}} = -Q_{\text{Maschine}}.$$

Der Arbeitsstoff wandelt sie in Volumenarbeit um. Der erste Hauptsatz gibt

$$Q_{\text{Maschine}} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial u}{\partial v} dv + \int_{v_1}^{v_2} \pi dv, \quad (\text{III, 31})$$

wobei π den Arbeitsdruck angibt, der technisch verwertbare Arbeit liefert. Trägt man (III, 31) in (III, 30) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta(\tau)} \left[- \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial u}{\partial v} dv - \int_{v_1}^{v_2} \pi dv + \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial u}{\partial v} dv - \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial f}{\partial v} dv \right] &\geq 0 \\ \frac{1}{\beta(\tau)} \left[- \int_{v_1}^{v_2} \left[\pi + \frac{\partial f}{\partial v} \right] dv \right] &\geq 0.\end{aligned}$$

Für $t \rightarrow \infty$ gilt das Gleichheitszeichen und man erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -p, \quad (\text{III, 32})$$

d. h. die Ableitung der Funktion f nach dem Volumen ist gleich dem negativen Gleichgewichtsdruck. Für endliche Zeiten ist der Gleichgewichtsdruck stets größer wie der Arbeitsdruck π .

Führen wir in analoger Weise einen Vorgang isotherm durch, bei dem sich die Zustandskoordinate x_i ändert, so liefert uns die Überlegung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -X_i, \quad (\text{III, 33})$$

dabei kann z. B. x_i eine Oberfläche, X_i die zugehörige Gleichgewichtsoberflächenspannung sein.

Wir sind nun in der Lage, einen expliziten Ausdruck für die universelle Funktion $\beta(\tau)$, die den Charakter der absoluten Temperatur besitzt, anzugeben. Dadurch können wir bei jeder konventionellen Temperatur den Wert der absoluten Temperatur angeben.

Auf Grund der Gl. (II, 2) (III, 27, 28) gilt:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \tau \partial v} = \frac{1}{\beta(\tau)} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial v}; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial \tau} = -\frac{\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}}{\beta^2(\tau)} \left[\frac{\partial u}{\partial v} + p \right] + \frac{1}{\beta(\tau)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \tau} \right]$$

$$\frac{\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}}{\beta(\tau)} \left[\frac{\partial u}{\partial v} + p \right] = \frac{\partial p}{\partial \tau}.$$

Für He gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0; \quad p = \frac{R(\tau + 273)}{v}$$

$$\frac{\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}}{\beta(\tau)} \frac{R(\tau + 273)}{v} = \frac{R}{v}; \quad \ln \beta(\tau) = \ln C + \ln(\tau + 273),$$

$$\beta(\tau) = C(\tau + 273).$$

Die Integrationskonstante ist noch zu bestimmen, sie legt die Größe der einzelnen Skalen und das Vorzeichen von $\beta(\tau)$ fest. Wir legen sie durch die Forderung fest, daß zwischen dem Eispunkt und dem Kochpunkt des Wassers unter Normalbedingungen ein Unterschied der absoluten Temperatur von 100° liegen soll. $\beta(\tau)$ soll positiv sein,

$$\beta(0) = C \cdot 273; \quad \beta(100) = C(273 + 100) = \beta(0) + C \cdot 100$$

$$C = 1$$

$$\beta(\tau) = \tau + 273.$$

Die Funktion $\beta(\tau)$ bezeichnen wir in Zukunft mit T . Mit den Gln. (III, 32, 33) schreiben sich die Gln. (III, 27, 28, 29)

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial T} \quad (\text{III, 34})$$

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial u}{\partial v} + p \right] \quad (\text{III, 35})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} + X_i \right]. \quad (\text{III, 36})$$

Da die Temperatur T und die partiellen Ableitungen von u sowie die Intensitätsgrößen p und X_i leicht gemessen werden können, sind die partiellen Ableitungen von s sämtlich bekannt. Kennen wir nun noch den Entropiewert eines Normzustandes (dieser wird im Prinzip vom dritten Hauptsatz geliefert), so ist damit die Entropie jedes Zustandes berechenbar. Damit haben wir das am Ende von § II erwähnte Ziel erreicht.

Aus den Gln. (III, 32, 33, 34, 35, 36) folgt vermittlels der Integrabilitätsbedingungen (II, 2, 4, 10)

$$\frac{\partial u}{\partial v} + p = T \frac{\partial p}{\partial T} \quad (\text{III, 37})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + X_i = T \frac{\partial X_i}{\partial T} \quad (\text{III, 38})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial v} \quad (\text{III, 39})$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \quad (\text{III, 40})$$

Die Anwendung der Gl. (III, 38) auf spezielle Beispiele führt wie bekannt zur Gibbs'schen Gleichung von der Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Konzentration und zu den Lippmann-Helmholtz'schen Gleichungen.

g) Wir haben in dieser ersten Mitteilung die Ergebnisse der klassischen Thermodynamik aus dem Zeitaxiom hergeleitet. Es erhebt sich die Frage, was damit erreicht ist.

Wir haben gezeigt, daß die Funktion s nicht, wie bisher angenommen, eine Funktion von reversiblen, das heißt zeitlosem Charakter darstellt, sondern daß sie im wesentlichen einen irreversiblen Charakter trägt, wie aus der Verknüpfung mit der Zeitkoordinate durch die Gl. (III, 1) hervorgeht. Eine Beschreibung der Naturvorgänge mit Hilfe der Funktion s ist also so lange unvollständig, als lediglich die Entropie durch die Gln. (III, 34, 35, 36) definiert erscheint. Zur vollständigen Beschreibung muß, wie wir gesehen haben, das Zeitaxiom mit herangezogen werden.

Wenn wir das tun, so haben wir die Mängel der klassischen Thermodynamik, die von vielen Autoren bemerkt worden sind, und die ihren Grund in der alten Zustandsdefinition haben, beseitigt. Es ergibt sich aus den Ergebnissen der ersten Mitteilung die Rechtfertigung des Verfahrens, für Nichtgleichgewichtszustände „reversibel“ berechnete thermodynamische Funktionen zu verwenden, vorausgesetzt, daß die betrachteten Abläufe genügend langsam sind. Dieses Verfahren wurde bis jetzt schon von den Autoren angewandt, die ihre Arbeiten an Onsager anschließen. Die Autoren waren sich aber dabei durchaus im klaren, daß das Verfahren auf Grund der alten Entropie- und Zustandsdefinition eigentlich nicht zulässig war, es infolgedessen noch einer Rechtfertigung bedarf.

Unsere an das Zeitaxiom anschließende Theorie führt aber noch weiter.

Wir brauchen ja nur unsere aus Gl. (III, 34, 35, 36) bestimmten Entropien in Gl. (III, 1) einzusetzen und erhalten unter der Voraussetzung, daß uns die Funktionen μ und $\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_0^*$ bekannt seien, die Zeitgesetze der Vorgänge und für $t \rightarrow \infty$ die Gleichgewichte. Damit haben wir dann eine vollständige, die Zeit berücksichtigende Beschreibung der Vorgänge gegeben. Es zeigt sich, daß man die Formeln der bisherigen „reversiblen“ Thermodynamik aus unseren Formeln jeweils dadurch erhält, daß man den Grenzübergang nach $t \rightarrow \infty$ macht. In einer weiteren Mitteilung werden wir die Untersuchung der Funktionen μ und $\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)_0^*$ durchführen und zeigen, daß in der an das Zeitaxiom anschließenden Theorie der irreversiblen Prozesse die Lücke zwischen Thermodynamik und Kinetik geschlossen wird und daß eine gemeinsame Theorie für die beiden bis jetzt getrennten Gebiete möglich ist. Des ferneren werden wir zeigen, daß unsere Theorie in der Lage ist, eine Schwierigkeit der Meixner-Onsager-de Groot'schen Theorie²⁾ zu beheben, da sich aus unserer ohne irgendeine Zusatzannahme die „phänomenologischen Gleichungen“ gewinnen lassen und über die Koeffizienten dieser Gleichungen Aussagen gemacht werden können.

²⁾ Literaturzusammenstellung über diese Theorie bei S. R. de Groot, *Thermodynamics of irreversible Processes*, Amsterdam 1951.

Karlsruhe, Institut für theoretische²⁾ Physik der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 4. August 1952.)

Zur Schrödinger-Gordon-Gleichung

Von K. F. Novobatzky

Inhaltsübersicht

Die relativistische Wellengleichung von Schrödinger und Gordon wird nach der Methode der statistischen Gesamtheit behandelt. Es stellt sich heraus, daß sie als völlig einwandfreie relativistisch-spinlose „Ein-Teilchen Wellengleichung“ betrachtet werden kann, die ihren Sinn, im Gegensatz zur bestehenden Auffassung, nicht erst durch die zweite Quantelung erhält.

Die moderne Literatur der Quantentheorie stellt sich einheitlich auf den Standpunkt Borns, wonach die Aussagen der Theorie statistisch zu bewerten sind. Das Kennzeichen statistischer Theorien besteht nun darin, eine statistische Gesamtheit zu definieren, um über diese nach gewissen Regeln zu mitteln. Trotz des allgemeinen angenommenen statistischen Standpunktes findet man sonderbarerweise kein Bestreben, die statistische Gesamtheit und ihre Eigenschaften zu ermitteln. In einer kurzen Mitteilung¹⁾ machte ich einen Versuch in dieser Richtung. Dort wurde auch die spinlose relativistische Mechanik gestreift, jedoch unter der beschränkenden Annahme, daß die Ruhmasse des Teilchens sich während der Bewegung nicht ändere. Hier nun soll die Schrödinger-Gordon-Gleichung nach dem Muster von I in voller Allgemeinheit behandelt werden.

Den Ausgangspunkt bildet die relativistische Punktmechanik. Der Massenpunkt mit der Ruhmassenkonstanten m_0 und der Ladung e stehe unter der Einwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit dem Viererpotential Φ_i . Dann lautet die Hamilton-Jacobische Bewegungsgleichung:

$$\frac{1}{2m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} = 0. \quad (1)$$

Die erste charakteristische Gleichung gibt die Vierergeschwindigkeit

$$\frac{dx_i}{d\tau} = u_i = \frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right). \quad (2)$$

Die Bedingung

$$\sum \left(\frac{dx_i}{d\tau} \right)^2 = -c^2$$

ist nach (1) erfüllt. Elimination von $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ aus der ersten und zweiten charakteristischen Gleichung führt bekanntlich zur Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} m_0 u_i = F_{ik} u_k \frac{e}{c} \quad \left(F_{ik} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right). \quad (2')$$

¹⁾ Ann. Physik (6) 9, 406 (1951). Im folgenden zitiert als I.

Der Grundgedanke der zu schaffenden Statistik entspringt wie in I der Erkenntnis, daß die Wirkungsfunktion $S(x_i)$ nach (2) ein Geschwindigkeitsfeld und dadurch die Bewegung einer unendlichen Punktmenge beschreibt, welche letztere man als statistische Gesamtheit wählt. Schreibt man für die stets positive Ruh-teildichte $\rho_0 = A^2$, so verlangt das Verbleiben der Punktzahl das Bestehen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rho_0 u_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} A^2 \frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) = 0. \quad (3)$$

A^2 soll die Anzahl der Massenpunkte m_0 in der Einheit des Ruhvolumens bezeichnen. Die Gln. (1) und (3) folgen aus einem Variationsprinzip mit der Lagrange-Funktion

$$L = 2 A^2 \left\{ \frac{1}{2 m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \right\}. \quad (4)$$

Zu variieren sind A und S .

Die Schwierigkeit, die beseitigt werden muß, liegt darin, daß die drei willkürlichen Konstanten in der allgemeinen Lösung von S die statistische Punkt-gesamtheit wesentlich beeinflussen. Die schöne Bemerkung von Joos, wonach die Quantenmechanik die Mechanik ohne Integrationskonstanten sei, steht hier an der richtigen Stelle. Es gibt kaum einen anderen Ausweg, als daß man für A und S reguläre Lösungen fordert, die bekanntlich keine unbestimmten Konstanten enthalten. Evidenterweise entspringt hier die Forderung der Regularität einer inneren Notwendigkeit und ist keine lose Zutat. Da aber die gewöhnliche Mechanik die Regularität von ρ_0 bei Bewegungen mit Umkehrpunkten ausschließt, muß eine Verallgemeinerung der Mechanik vorgenommen werden, die sehr eindeutig durchgeführt werden kann. Nach dem Vorgang von I erhält man für den relativistischen Fall die verallgemeinerte Lagrange-Funktion

$$L = 2 A^2 \left\{ \frac{1}{2 m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \right\} - \frac{\hbar^2}{m_0} \sum \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right)^2. \quad (5)$$

Die daraus fließenden Eulerschen Gleichungen lauten

$$\frac{1}{2 m_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2 m_0} \frac{\square A}{A} = 0 \quad (6)$$

und die Kontinuitätsgleichung (3). Bildet man aus A und S die komplexe Funktion

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (7)$$

so lassen sich die Hauptgleichungen (3) und (6) in der Schrödinger-Gordon-Gleichung

$$\left\{ \frac{1}{2 m_0} \sum \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \right\} \psi = 0 \quad (8)$$

vereinigen. Der reelle Teil dieser Gleichung gibt (6), der imaginäre (3). Die relativistische Wellengleichung (8) ist also den Gln. (6) und (3) vollkommen äquivalent, sie beschreibt die Bewegung einer Punktmenge.

Aus dem vorübergehenden weiß man bereits, daß nur reguläre Lösungen in Betracht kommen. Man hat weiter

$$A^2 = \psi^* \psi. \quad (9)$$

Aus (7) folgt

$$S = \frac{\hbar}{2i} \lg \frac{\psi^*}{\psi}. \quad (10)$$

Setzt man diesen Wert im Verein mit jenem von A^2 aus (9) in die Kontinuitätsgleichung (3) ein, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\hbar}{2i m_0} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \right) - \frac{e}{m_0 c} \Phi_i \psi^* \psi \right\} = 0$$

und daraus ergeben sich die Komponenten des Viererstromes zu

$$s_i = \frac{\hbar}{2i m_0} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \right) - \frac{e}{m_0 c} \Phi_i \psi^* \psi. \quad (11)$$

Dies ist der aus der Quantenmechanik wohlbekannte Ausdruck. Während aber dort seine Bedeutung als Wahrscheinlichkeitsfluß axiomatisch festgelegt werden muß, folgt sie hier von selbst. s_i gibt einfach die Punktmenge der Gesamtheit an, die pro sec normal durch die Flächeneinheit fließt. Je größer diese Punktmenge ist, um so größer die statistische Wahrscheinlichkeit, einen hindurchströmenden Massenpunkt vorzufinden. Auf den Viererstrom soll im folgenden noch zurückgegriffen werden.

Vorerst möge gezeigt werden, daß die verallgemeinerte Jacobische Gl. (6) eine durchaus klassisch-relativistische Bewegung der Punktgesamtheit beschreibt. Nach leichter Umformung hat man

$$\sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + m_0^2 c^2 - \hbar^2 \frac{\square A}{A} = 0.$$

Nun führe man die veränderliche Ruhmasse m'_0 ein durch die Festsetzung

$$m_0^2 c^2 - \hbar^2 \frac{\square A}{A} = m_0'^2.$$

Daraus ergibt sich

$$m'_0 = m_0 \sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} \frac{\square A}{A}}. \quad (12)$$

Nach Division durch $2 m'_0$ lautet die Gleichung

$$\frac{1}{2 m'_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 + \frac{m'_0 c^2}{2} = 0. \quad (13)$$

Jetzt hat sie jene Form, nach der die erste charakteristische Gleichung eine Vierergeschwindigkeit ergibt:

$$u_i \equiv \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{m'_0} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right). \quad (14)$$

(13) garantiert die Erfüllung der Bedingung $\sum u_i^2 = -c^2$. Bezeichnet man die linke Seite von (13) für einen Augenblick mit F , so schreibt sich die zweite charakteristische Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial S}{\partial x_i} = - \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

In diese setzt man den Ausdruck von $\frac{\partial S}{\partial x_i}$, wie er aus (14) folgt, ein und bedenkt, daß x_i in m'_0 und Φ_i enthalten ist. Dann hat man

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(m'_0 u_i + \frac{e}{c} \Phi_i \right) &= \frac{1}{2 m_0'^2} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 \frac{\partial m'_0}{\partial x_i} \\ &+ \frac{1}{m_0'} \left(\frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right) \frac{e}{c} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m'_0}{\partial x_i} c^2. \end{aligned}$$

Links schreibt man für $\frac{d\Phi_i}{d\tau}$ den Ausdruck $\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k} u_k$, rechts ist das erste Glied infolge von (12) gleich $-\frac{1}{2} \frac{\partial m'_0}{\partial x_i} c^2$. Man erhält demnach die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} m'_0 u_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} m'_0 c^2 + F_{ik} u_k \frac{e}{c}. \quad (15)$$

Der Vergleich mit (2) zeigt, daß durch das Zusatzglied $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\square A}{A}$ in (6), das allein von der Dichte abhängt, in der Bewegungsgleichung das Viererpotential $m'_0 c^2$ auftritt. Es möge Dichtepotential genannt werden.

Das Ergebnis läßt sich in der Feststellung zusammenfassen, daß die Schrödinger-Gordon-Gleichung die klassische Bewegung einer Punktgesamtheit beschreibt gemäß dem Gesetz: zeitliche Änderung des Viererimpulses gleich bewegender Viererkraft. Nur diese Kraft selber ändert sich, wie der Vergleich mit (2) zeigt, durch das Auftreten eines Dichtepotentials.

Die Wichtigkeit einer klassischen Bewegung liegt auf der Hand. Man könnte sonst die physikalischen Größen der unklassischen Gesamtheit nicht einfach im klassischen Sinne interpretieren. Es wäre z. B. ganz rätselhaft, welcher Ausdruck der unklassischen Bewegung als wirkliche kinetische Energie anzusprechen sei. Man wäre dann auch nicht sicher, ob die im stationären Falle aus der Gleichung $\frac{\partial S}{\partial \tau} = -E$ entspringende Größe E etwas mit der Energie im gewöhnlichen Sinne zu tun habe. In unserem Falle ergibt sich, wie eine leichte Rechnung zeigt

$$E = e\Phi + \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\Phi_i = i\Phi),$$

eben das, was man erwarten muß. Der Umstand, daß der Ausdruck des Energie-Eigenwertes für das H -Atom zu unrichtiger Feinstruktur führt, ist also einzig dadurch bedingt, daß die Gleichung sich auf spinlose Teilchen bezieht. Selbstverständlich ist das nicht, wenn man bedenkt, daß die Sommerfeldsche Ableitung auch keinen Spin berücksichtigt.

Ganz nebenbei sei bemerkt, daß der Übergang der konstanten Ruhmasse m_0 in die veränderliche m'_0 immer dann eintritt, wenn die Viererkraft vorgegeben ist, so daß die Viererarbeit nicht identisch verschwindet. Ist z. B. das Viererpotential $V(x_k)$ gegeben, so hat man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} m'_0 u_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \text{oder} \quad u_i \frac{dm'_0}{d\tau} + m'_0 \frac{du_i}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Wird mit u_i multipliziert, so folgt

$$-c^2 \frac{dm'_0}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} u_i = \frac{dV}{d\tau}, \quad \text{also} \quad \frac{dm'_0}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{dV}{d\tau}$$

und integriert $m'_0 = m_0 + \frac{V}{c^2}$. Der Massenwert $\frac{V}{c^2}$ des Viererpotentials vergrößert die Ruhmasse. Die Jacobische Gleichung dieses Problems ist

$$\frac{1}{2m'_0} \sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{m'_0 c^2}{2} = 0.$$

Es muß noch kurz nachgewiesen werden, daß die Gl. (3) auch jetzt, bei veränderlicher Ruhmasse, die Kontinuitätsgleichung darstellt. Definiert man als

Ruhdichte der Punktzahl die stets positive Größe $\varrho_0 = A^2 \frac{m'_0}{m_0}$, so folgt als Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho_0 u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ A^2 \frac{m'_0}{m_0} \cdot \frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) \right\} = 0, \quad (15)$$

d. h. die Gl. (3). Dies besagt wieder die Erhaltung der Punktzahl und wenn jeder Massenpunkt mit der Ladung e behaftet ist, auch die Erhaltung der Ladung. Wohl aber nicht die der Masse, die im Sinne der Gl. (12) veränderlich ist.

Nach den bisherigen Ableitungen ist man in der Lage, sich der Besprechung der Schrödinger-Gordon-Gleichung zuzuwenden. Man weiß, daß sie von Dirac nicht anerkannt wird, weil sie in t von zweiter Ordnung ist. Man weiß auch, daß sie von Pauli und Weißkopf akzeptiert wird, allerdings mit einer von der gewöhnlichen sehr abweichenden Interpretation. Den Stein des Anstoßes bildet die Formel (11). Aus ihr folgt für $i = 4$

$$s_4 = i \varrho = \frac{\hbar}{2 i m_0} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_4} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_4} \right) - \frac{e}{m_0 c} \Phi_4 \psi^* \psi. \quad (16)$$

Da die Gleichung in t oder x_4 von zweiter Ordnung ist, kann für einen gegebenen Zeitpunkt sowohl ψ wie $\frac{\partial \psi}{\partial x_4}$ frei gewählt werden und dadurch läßt sich sicherlich erreichen, daß der Ausdruck rechts für diesen Zeitpunkt negativ imaginär wird. Das gibt eine negative Dichte ϱ , d. h. die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in der Umgebung eines vorgegebenen Ortes anzutreffen, wird negativ. Deshalb wird dem ψ die Fähigkeit abgesprochen, den Zustand eines Teilchens zu beschreiben. (Siehe z. B. das ausgezeichnete Lehrbuch von A. March, 1951, S. 177). Vom reinen ψ -Standpunkt aus läßt sich dagegen nichts einwenden. Man kann sich auch keine Rechenschaft darüber ablegen, von wo die Absurdität eigentlich herkommt. Nach unserer Darstellung tritt die Sache klar zutage. Die ψ -Funktion beschreibt die Bewegung einer Punktgesamtheit, es hat also sowohl die Ruhdichte ϱ_0 , als auch die Systemdichte ϱ einen guten Sinn. Die zwei Größen hängen durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{i c} \varrho_0 u_4$$

zusammen. Da nun ϱ_0 immer positiv ist, kann ϱ nur dadurch negativ werden, daß man $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ mit negativem Vorzeichen, oder anders ausgedrückt, u_4 negativ imaginär wählt. Dann aber hat man eine ganze Menge von Absurditäten. Dann fällt die Systemlänge eines Maßstabes von positiver Ruhlänge negativ aus und ebenso die Systemzeitspanne einer positiven Ruhdauer. Man übersieht jetzt, daß die Wurzeln des negativen ϱ -Wertes nicht in physikalische Tiefen hinabreichen. Nolens volens muß man sich dazu bequemen, der Gl. (8) den Satz beizufügen, daß die Anfangswerte den Ausdruck (16) nicht negativ imaginär machen dürfen. Dann ist alles in Ordnung.

Es läßt sich auch auf andere Weise sehr eindringlich zeigen, daß u_4 , oder nach (14) $\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c} \Phi_4$ positiv imaginär sein muß. Denn nur dann geht die relativistische Gl. (8) durch den Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ in die unrelativistische Schrödinger-

Gleichung über. Die Möglichkeit dieses Überganges muß unbedingt gefordert werden. Aus (6) folgt

$$\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c} \Phi_4 = \pm i \sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 - \hbar^2 \frac{\square A}{A}} \quad (17)$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + c \Phi &= \mp c \sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 - \hbar^2 \frac{\square A}{A}} \\ &= \mp m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{\sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 - \hbar^2 \frac{\square A}{A}}{m_0^2 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Man braucht nur bis zum zweiten Gliede zu entwickeln, denn die übrigen enthalten c im Nenner und fallen beim Grenzübergang weg. Aus $\square A$ wird $\triangle A$. Zu beachten ist noch, daß $m_0 c^2 = E_0$ die Ruheenergie bedeutet, die als gegebene Größe keinem Grenzübergang unterworfen werden kann. Man hat demnach für $c \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + e \Phi = \mp \left\{ E_0 + \frac{1}{2m_0} \sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\triangle A}{A} \right\}.$$

Der rechtsseitige Ausdruck muß mit positivem Vorzeichen auf der linken Seite stehen, um nach I (9) die Schrödinger-Gleichung zu ergeben. Also ist das obere Vorzeichen das richtige, auch in (17). $\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c} \Phi_4$, d. h. u_4 muß positiv imaginär sein. Zu bemerken ist noch, daß bei dem Grenzübergang auch die Kontinuitätsgleichung (3) in die entsprechende I (10) übergeht.

Aus (18) folgt noch etwas sehr Interessantes. Man setze dem stationären Fall gemäß $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ und streiche $e \Phi$. Dann bedeutet E die kinetische Energie und die Gleichung gibt mit unterem falschen Vorzeichen

$$E_{\text{kin}} = -c \sqrt{\dots}$$

Die kinetische Energie könnte also negativ sein wie bei Dirac. Der Unterschied ist aber, daß bei Dirac die negative kinetische Energie mit der stets positiven Dichte verknüpft ist, während hier negative Energie nur bei negativer Dichte auftreten kann. Dies steht im Einklang mit dem Energieausdruck $E = e \Phi +$

$$\frac{m_0^2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die bekannte Interpretation, daß q infolge des möglichen Doppelvorzeichens nur eine elektrische Dichte bedeuten könne, ist sicher nicht stichhaltig. Der Massenpunkt braucht ja überhaupt keine Ladung zu haben und statt des elektromagnetischen Feldes kann man eine beliebige Massenwirkungskraft einführen. Soll die Schrödinger-Gordon-Gleichung dann einfach sinnlos werden? Nach den obigen Ausführungen nicht. Auch darf die Gleichung nicht mit Zerstrahlung in Zusammenhang gebracht werden. Das läßt die Punktzahl-Kontinuitätsgleichung (3) nicht zu.

Ebenso wichtig, wie die Definition der statistischen Gesamtheit ist die der Mittelung. Es soll darüber kurz gesprochen werden, auch wenn dabei viel Bekanntes

gefordert unterläuft. Aus der Homogenität und Linearität der Gl. (8) folgt sofort der Operatorenbegriff. Der Vergleich von (8) mit (1) zeigt die bekannte Entsprechung

$$(17) \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} \sim \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x_i \sim x_i.$$

Jeder Phasenfunktion $F(x, p)$ ist daher ein Operator Ω zugeordnet. Es leuchtet unmittelbar ein, daß der klassische Mittelwert $\bar{F} = \frac{\int F \varrho dV}{\int \varrho dV}$ oder $\bar{F} = \int F \varrho dV$, wenn der Nenner auf 1 normiert wird, absolut nicht in Betracht kommen kann. Denn durch das Dichtepotential werden die gegebenen äußeren Kräfte so umgeändert, geradezu verfälscht, daß der klassische Mittelwert total falsche Werte ergeben würde. Betrachte man z. B. eine Eigenfunktion des linearen Oscillators

$$\psi_n = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad \left(\xi = \sqrt{\frac{m \omega}{\hbar}} x \right).$$

H_n ist das n -te Hermitesche Polynom. Da der Faktor von $e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$ reell ist, besteht S aus dem Ausdruck $-E_n t$. Der Impuls $p_x = \frac{\partial S}{\partial x}$ verschwindet, die statistische Gesamtheit ist eine unbewegliche, starre Punktmenge, deren Dichte nach rechts und links exponentiell abfällt. Man sieht klar den Einfluß des Dichtepotentials, das das elastische Potential abdröselt. Diese leblose Punktmenge soll die statistische Gesamtheit für den schwingenden Oscillator abgeben. Die Mittelwerte von p_x, p_x^2, \dots, p_x^n nach der gewöhnlichen Weise: $\bar{p}_x^n = \int A^2 p_x^n dx$ berechnet, würden sich sämtlich zu Null ergeben, während doch schon die unmittelbare Anschauung zeigt, daß p_x^2 nicht Null sein kann. Die Mittelwertbildung muß abgeändert werden. Das „wie“ folgt eindeutig aus dem plausiblen Axiom, daß, wenn Ω den Operator von F bedeutet, keine anderen Werte von F gemessen werden können, als jene λ_n , die der Eigenwert-Gleichung

$$\Omega \varphi_n = \lambda_n \varphi_n \quad (19)$$

entspringen. Die Bewegung der Punktgesamtheit besitzt den großen Vorteil, daß sie durch eine einzige Funktion $\psi(x, y, z, t)$ beschrieben werden kann. Wird nun ψ nach den φ_k entwickelt:

$$\psi = \sum a_k \varphi_k, \quad (20)$$

so könnte man vielleicht im ersten Augenblick geneigt sein, a_k als jenes Maß zu betrachten, mit dem die Gesamtheit φ_k in ψ vertreten ist. Da aber a_k im allgemeinen komplex ist, außerdem nicht für die a_k , wohl aber für die $|a_k|^2$ gilt: $\sum |a_k|^2 = 1$, so wird man $|a_k|^2$ als jenes Maß betrachten. Mit φ_k ist natürlich auch die Größe λ_k mit dem Gewicht $|a_k|^2$ in ψ enthalten. Der Mittelwert der Größe F in der ψ -Gesamtheit wird demnach $\bar{F} = \sum |a_k|^2 \lambda_k$. Läßt man auf (20) den Operator Ω einwirken, so ergibt sich $\Omega \psi = \sum a_k \lambda_k \varphi_k$. Aus (20) folgt noch $\psi^* = \sum a_k^* \varphi_k^*$. Multipliziert man die zwei letzten Gleichungen und integriert über den Konfigurationsraum, so erhält man $\int \psi^* \Omega \psi dV = \sum |a_k|^2 \lambda_k = \bar{F}$, also den gesuchten Mittelwert. Hervorgehoben sei, daß die zu λ_k gehörige Eigenfunktion φ_k eine Gesamtheit beschreibt, in der jeder einzelne Massenpunkt als Betrag der physikalischen Größe F den numerischen Wert λ_k aufweist. Ist φ_k z. B. Energieeigenfunktion, so besitzt jeder Punkt der Gesamtheit dieselbe Energie λ_k .

Dieser kleine Abschnitt, der nichts Neues enthält, wurde nur deshalb hierher gesetzt, um zu zeigen, wie sich der statistischen Gesamtheit die Mittelwertbildung organisch anschließen läßt.

Das Dichtepotential, das die Bewegung radikal beeinflußt und die unklassische Bildung des Operatorenmittelwertes gleichen sich sozusagen gegenseitig aus und ergeben z. B. auf die starre Punktgesamtheit des Oscillators angewandt, die bekannten zutreffenden Mittelwerte.

Ein sehr lehrreiches Beispiel dafür, in welchem Maße das Dichtepotential die Quantenmystik klassisch verständlich macht, bietet die Gl. I (9). Für den stationären Fall ($\frac{\partial S}{\partial t} = -E$) lautet sie

$$-E + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A} = 0.$$

Sie besagt, daß die Energie E eines Teilchens der Gesamtheit keineswegs nur aus der kinetischen und der potentiellen Energie des äußeren Kraftfeldes besteht, sondern auch aus dem Dichtepotential $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A}$. Man hat hier sofort die klassische Erklärung des Tunneleffektes. Es ist das Dichtepotential, das den Massenpunkt über die Schwelle hebt und verhindert, daß die kinetische Energie negativ werde.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die Methode der statistischen Gesamtheit die Schrödinger-Gordon-Gleichung als korrekte spinlose „Ein-Teilchen-Wellengleichung“ charakterisiert. Allerdings unter der besprochenen, selbstverständlichen Anfangswert-Bedingung.

Für die stationären Eigenfunktionen gibt es allerdings keine Anfangswerte. Dann ist folgendes zu beachten. Die richtige relativistische Wellengleichung ist (17) mit oberem Vorzeichen im Verein mit der Kontinuitätsgleichung (3). Die Schrödinger-Gordon-Gleichung ist keine einfache Zusammenfassung dieser zwei Gleichungen, sondern enthält (17) in quadrierter, rationaler Form. Man muß also die Lösungen der rationalen Gleichung in die irrationale (17) einsetzen, um über ihre Gültigkeit zu entscheiden. Z. B. führt das Repulsionspotential $\frac{e^2}{r}$ (Proton-Positron) im stationären Falle zu negativer Dichte. Folgerung: für dieses Potential gibt es keine stationären Zustände.

In diesem Sinne ist die Schrödinger-Gordon-Gleichung die richtige Ein-Teilchen-Wellengleichung spinloser Partikeln. Sie hat auch ohne Superquantelung ihren guten Sinn.

Budapest, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 27. August 1952.)

Über die physikalische Interpretation der Lorentz-Transformation¹⁾

Von L. Jánossy

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Wir geben eine detaillierte Analyse jener klassischen Überlegungen, die Einstein zu der bekannten Interpretation der Lorentz-Transformation führten. Die Analyse führt zu dem Ergebnis, daß die Lorentz-Transformation besser verstanden werden kann in einer Weise, die der Lorentz- und Fitzgeraldschen Auffassung näher steht als der Einsteinschen Auffassung. Insbesondere wird ausgeführt, daß die Lichtgeschwindigkeit nicht als die obere Grenze der Geschwindigkeit jeder physikalischen Wirkung betrachtet werden sollte, sondern daß vielmehr die Lichtgeschwindigkeit einfach diejenige Geschwindigkeit bedeutet, mit der sich die meisten physikalischen Wirkungen tatsächlich ausbreiten.

I. Einleitung

§ 1. Als ich zuerst mit der Relativitätstheorie bekannt wurde, bereiteten mir, wie vielen anderen Physikern, die neuen Ideen große Schwierigkeiten. Nach näherer Bekanntschaft mit den Ideen der Relativitätstheorie gab ich mich mit diesen Ideen zufrieden, aber dieselben Schwierigkeiten tauchten — zu meiner größten Überraschung — wieder bei meinen Studenten auf, als ich später selbst die Relativitätstheorie vortrug. Wir müssen nun die Frage stellen, ob am Ende diese Schwierigkeiten, über die wir glaubten, hinweggekommen zu sein, nicht in Wirklichkeit tief liegende Schwierigkeiten sind, die der Relativitätstheorie eigen sind. Der Formalismus der Relativitätstheorie selbst ist selbstverständlich völlig einwandfrei und führt zu sehr vielen quantitativ richtigen Resultaten.

Nach reiflicher Überlegung gelangte ich zu dem Schluß, daß diese Ideen der Relativitätstheorie, die anfangs so große Schwierigkeiten bereiten, in der Tat entbehrlich sind, und daß die Relativitätstheorie von einfachen Ideen ausgehend so aufgebaut werden kann, daß ihr physikalischer Inhalt viel klarer zum Vorschein kommt. Diese neue Fassung der Theorie führt natürlich zu keinem neuen Resultat, da der mathematische Formalismus unverändert belassen wird. Der einzige wesentliche Unterschied zwischen der alten und neuen Auffassung tritt in der Frage der Interpretation der Rolle der Lichtgeschwindigkeit hervor. Insbesondere drängen sich uns neue Überlegungen auf im Zusammenhang mit der Frage, ob es physikalische Wirkungen geben kann, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

¹⁾ Vgl. auch Artikel desselben Verfassers Acta Physica Hungarica 1952; im Erscheinen.

In dem nachfolgenden Artikel werden wir weiterhin zeigen, daß die hier vorgeschlagene, neue Interpretation der Relativitätstheorie auch die Interpretation gewisser neuer Quantenphänomene vereinfacht. Es scheint uns, daß die logischen Schwierigkeiten der Relativitätstheorie und Quantentheorie eng miteinander verknüpft sind.

§ 2. Der Ausgangspunkt der Relativitätstheorie war das negative Ergebnis des Michelson-Morley-Versuches und vieler ähnlicher Versuche. Das Michelson-Morley-Experiment zeigt, daß das Licht sich isotrop ausbreitet in bezug auf die Erde, ganz unabhängig von der Bewegung der Erde im Raum. Verallgemeinernd wird geschlossen, daß die Lichtausbreitung isotrop erscheint in allen Inertialsystemen $K_0, K_1 \dots$ auch dann, wenn diese Inertialsysteme sich in Translation zueinander befinden. Wir stehen also vor der Aufgabe, dieses merkwürdige experimentelle Resultat zu deuten, das zu zeigen scheint, daß sich ein und dieselbe Lichtwelle in verschiedenen zueinander bewegten Systemen isotrop ausbreitet.

Betrachten wir ein System K_0 und betrachten wir eine Kugelwelle, die zur Zeit $t = 0$ vom Ursprung des Systems K_0 ausgeht. Nehmen wir ferner an, daß sich die Welle in allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit c bewege. Die Gleichung, welche die Bewegung der Welle beschreibt, ist dann

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (1)$$

Nach der vor-relativistischen Auffassung würde sich diese Welle im Vergleich zu einem System K_1 , das sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der positiven x -Achse bewegt, nicht mehr isotrop ausbreiten. Wenn wir uns nicht auf x, y, z , die Koordinaten von K_0 beziehen, sondern auf x', y', z' , die Koordinaten von K_1 , so machen wir von der folgenden Transformationsformel Gebrauch:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad (2)$$

außerdem können wir für die Zeit-Koordinate hinzufügen

$$t' = t. \quad (3)$$

Gln. (2) und (3) enthalten die Galilei-Transformation. Die Bewegung der Lichtwelle in K_1 wird also durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (c^2 - v^2) t'^2 - 2x't'v = 0. \quad (4)$$

Setzen wir für $y' = z' = 0$, dann erhalten wir jene Punkte der Welle, die entlang der x' -Achse fortschreiten mit einer Geschwindigkeit

$$c_{\pm x} = \frac{x'}{t'} = \pm c - v. \quad (5)$$

Wenn wir dagegen $x' = z' = 0$ setzen, erhalten wir die Punkte der Welle, die entlang der y' -Achse sich bewegen, und wir erhalten für die Geschwindigkeit dieser Punkte

$$c_{\pm y} = \frac{y'}{t'} = \pm \sqrt{c^2 - v^2}. \quad (6)$$

Der Michelson-Morley-Versuch scheint dagegen zu zeigen, daß

$$|c_{+x}| = |c_{-x}| = |c_{+y}| = |c_{-y}|$$

im Widerspruch zu den Gln. (5) und (6).

Es gibt zwei logisch mögliche Interpretationen dieser experimentellen Ergebnisse:

1. Die Auffassung von Lorentz und Fitzgerald. Nach dieser Auffassung ist die Lichtwelle nur in K_0 isotrop, wo K_0 das ausgezeichnete Bezugssystem ist, das relativ zum Äther ruht. Nach dieser Anschauung pflanzen elektromagnetische Wellen die Störungen des Äthers in einer der Fortpflanzung von Schallwellen in Luft ähnelnden Weise fort.

Dagegen pflanzen sich die Wellen in dem Bezugssystem K_1 nicht mehr isotrop fort, sondern nach Gl. (4). Es wird jedoch angenommen, daß die auftretende Anisotropie kompensiert wird durch Deformationen der experimentellen Anordnung. Lorentz setzte ursprünglich voraus, daß ein Stab, der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum Äther bewegt, eine Kontraktion im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ in seiner Längsdimension erleidet.

Um das gesamte experimentelle Material interpretieren zu können, mußte die ursprüngliche Hypothese erweitert werden. Lorentz und Fitzgerald postulierten schließlich die folgenden drei Arten der Deformation, die ein materielles System erleiden sollte als Folge seiner Bewegung zum Äther:

1. Längenkontraktion im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$,

2. Verlangsamung aller Bewegungen im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$,

3. Phasenverschiebungen zwischen Uhren. Die auftretende Phasenverschiebung zwischen zwei Uhren, die sich auf der x -Achse in der Entfernung x befinden, wird gegeben durch

$$\Delta t = -\frac{vx}{c^2 - v^2}. \quad (7)$$

Aus dem — Zeichen folgern wir, daß eine Uhr um so mehr Zeit verliert, je weiter vorne sie sich in der Bewegungsrichtung befindet.

Im folgenden wollen wir diese drei Effekte als „Lorentz-Deformation“ bezeichnen. Die Annahme der Lorentz-Deformationen führt zu einer vollen Erklärung des negativen Ergebnisses des Michelson-Morley-Versuches und ebenso andere Experimente, wie z. B. des Trouton-Nobleschen Experimentes.

Die Lorentz-Fitzgerald-Hypothese ist deswegen unbefriedigend, weil sie zu einer notwendigerweise metaphysischen Anschauung eines Äthers führt, der die „absolute Ruhe“ darstellt. Die Äther-Hypothese wird um so unbefriedigender, als dem Äther solche Eigenschaften zugeschrieben werden müßten, die eine Beobachtung des Bewegungszustandes des Äthers von vornherein ausschließen. In der Tat, es ist bekannt, daß es im Falle zweier Systeme K_0 und K_1 , die sich in Translation zueinander befinden, vom rein beschreibenden Standpunkte aus gleichgültig ist, ob wir annehmen, daß K_0 ruht, aber K_1 sich bewegt und in K_1 Deformationen auftreten, oder ob wir annehmen, daß nicht K_0 sondern K_1 ruht, und die Deformationen in K_0 stattfinden. Wir können diese experimentellen Resultate nämlich ebensogut von der einen wie von der anderen Annahme ausgehend deuten.

2. Die Einsteinsche Auffassung. Einstein versucht, die unbefriedigende Annahme des allumfassenden Äthers, in welchem die Welt schwimmen soll, zu vermeiden. Er geht in der folgenden Weise vor: Daraus, daß kein Experiment bekannt ist, das direkt eine Anisotropie der Lichtausbreitung in einem Inertialsystem nachzuweisen imstande ist, schließt Einstein, daß man vernünftigerweise annehmen muß, daß das Licht tatsächlich in allen Systemen sich isotrop ausbreitet. Diese Annahme ist allerdings in Widerspruch mit den Galileischen Transfor-

mationen (2) und (3). Deshalb schlägt Einstein vor, die Galileische Transformation durch eine solche Transformation zu ersetzen, die eine isotrop sich ausbreitende Lichtwelle in K_0 in eine ebensolche Welle in K_1 überführe. Die neue Koordinatentransformation sollte also so beschaffen sein, daß sie auf (1) angewandt nicht auf (4) führt, sondern auf

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

Von dieser Annahme kann die von Einstein geforderte Transformation tatsächlich mit einigen unwesentlichen Zusatzannahmen bestimmt werden. Die nötigen Nebenannahmen sind die folgenden:

- a) die Transformation soll linear sein,
- b) die Systeme K_0 und K_1 sollen vollkommen gleichwertig sein, d. h. die Transformation von K_1 nach K_0 soll sich von der, die von K_0 nach K_1 führt, nur dadurch unterscheiden, daß in den Transformationsformeln v durch $-v$ ersetzt ist.

Die auf diese Weise definierte Transformation ist die Lorentz-Transformation. Auf wohlbekannte Weise findet man

$$c' = c.$$

Weiterhin

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8)$$

Die merkwürdige Eigenschaft der Transformation (8) ist, daß sie auch die Zeit transformiert, d. h. im allgemeinen finden wir $t \neq t'$.

Aus (8) folgt, daß zwei Ereignisse, die in dem einen Bezugssystem gleichzeitig erscheinen, im allgemeinen nicht mehr gleichzeitig erscheinen in einem anderen System. Ferner, die Reihenfolge von Ereignissen kann verschieden sein in verschiedenen Bezugssystemen. Betrachten wir zwei Ereignisse A und B und setzen wir voraus, daß A in dem Punkt P mit den Koordinaten x_A, y_A, z_A zu einer Zeit t_A vor sich geht und daß B in einem anderen Punkt Q mit den Koordinaten x_B, y_B, z_B zu einer Zeit t_B vor sich geht; Zeiten und Koordinaten beziehen sich alle auf das System K_0 . Von K_1 betrachtet, geschehen die Ereignisse zu Zeiten t'_A und t'_B , wo

$$\tau_{AB} = \frac{t'_A - t'_B}{t_A - t_B} = \left(1 - \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B} \frac{v}{c^2}\right) / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (9)$$

Falls τ_{AB} einen negativen Wert hat, ist die Reihenfolge der Ereignisse A und B verschieden in K_0 und in K_1 . Wir entnehmen aus (9), daß, gesetzt $v < c$, eine solche Vertauschung nur dann stattfinden kann, falls

$$V_x = \left| \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B} \right| > \left| \frac{c^2}{v} \right| \geq c.$$

V_x ist die x -Komponente der Geschwindigkeit V , mit der ein Signal, das von P zur Zeit des Ereignisses A ausgesandt wurde, fortschreiten müßte, um den Punkt Q zur Zeit des Ereignisses B zu erreichen. (Wir setzen voraus, daß in K_0 das Ereignis A vor dem Ereignis B stattfindet.) Wir sehen, daß eine Umkehrung der Ereignisse nur dann eintreten kann, falls $V > c$.

Wir sehen also, daß die Lorentzsche Transformation die Reihenfolge nur solcher Ereignisse umdrehen kann, die nicht durch ein Signal, das mit einer Geschwindigkeit, die die des Lichtes nicht übertrifft, fortschreitet, miteinander verbunden werden können. Das Umdrehen der Reihenfolge von zwei unabhängigen

Ereignissen führt zu keinen logischen Schwierigkeiten; logische Schwierigkeiten entstehen nur dann, wenn wir versuchen wollten, die Reihenfolge solcher Ereignisse zu vertauschen, die als Ursache und Wirkung betrachtet werden müssen. Diese Schwierigkeit tritt aber nicht auf, wie von Einstein betont wird, falls wir annehmen können, daß sich eine physikalische Wirkung niemals mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzt.

Wenn wir also die Lorentz-Transformation (8) als die wahre Transformation von Zeit- und Raumkoordinaten betrachten, dann müßten wir, um den Schwierigkeiten, die durch die Umdrehung von Ursache und Wirkung sich ergeben würden, auszuweichen, annehmen, daß es keine physikalische Wirkung geben kann, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Diese Annahme aber, die Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeiten ausschließt, ist nicht auf Erfahrung oder Tatsachen aufgebaut. Sie ist nur notwendig, um unmögliche Folgerungen aus der Einsteinschen Interpretation der Lorentzschen Transformation auszuschließen. Es ist zwar richtig, daß alle bekannten physikalischen Wirkungen sich tatsächlich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, aber diese experimentellen und spekulativen Ergebnisse beweisen trotzdem keineswegs, daß sich keine physikalische Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten könnte. Die obigen Überlegungen zeigen nur, daß vom Standpunkt der Relativitätstheorie eine Wirkung, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet, eine große Unbequemlichkeit bedeuten würde.

In dem nachfolgenden Artikel werden wir auseinandersetzen, daß nach unserer Meinung eine logische Formulierung der Quantentheorie nur dann möglich ist, wenn wir mit Über-Lichtgeschwindigkeit fortgepflanzte Wirkungen voraussetzen.

§ 3. Wenn wir also einerseits die Anschauung von Lorentz und Fitzgerald, andererseits die von Einstein vergleichen, müssen wir zwischen den folgenden Schwierigkeiten wählen:

1. Entweder interpretieren wir die Lorentz-Transformation nicht als die eigentliche Transformation von Raum und Zeit, sondern als eine Transformation, welche die Deformation beschreibt, welche eine relativ zum Äther sich bewegende Materie erleidet. Diese Anschauung enthält die Schwierigkeit, daß der Bewegungszustand des ausgezeichneten Systems K_0 experimentell nicht festgelegt werden kann, da die Lorentz-Deformationen so beschaffen sind, daß sie den Unterschied zwischen bewegten Inertialsystemen verbergen.

2. Oder wir können annehmen, daß die Lorentz-Transformation ohne Bezug auf irgendwelche materielle Systeme die Transformation von Zeit- und Raumkoordinaten beschreibt. Hiermit wird die metaphysische Vorstellung der absoluten Ruhe eliminiert, aber sie führt zu logischen Schwierigkeiten mit der Zeittransformation. Diese Schwierigkeiten können „geflickt“ werden, wenn wir annehmen, daß sich in der Natur keine Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Dieses „Flicken“ ist aber nicht zufriedenstellend. Wir können niemals sicher sein, daß es eine Überlichtgeschwindigkeit nicht doch geben könnte, z. B. im Bereiche eines extragalaktischen Nebels, wenn schon nicht irgendwo in der Nähe. Es ist aber nicht zufriedenstellend zu postulieren, daß es so eine Geschwindigkeit nicht gibt, nur weil sie uns unbequem ist, und weil wir eine solche gerade nicht gefunden haben.

Mein Vorschlag, wie man diese Schwierigkeiten überbrücken könnte, stützt sich wesentlich auf die Lorentz und Fitzgeraldsche Anschauung. Ich schlage nicht etwa vor, anzunehmen, daß es ein starres System K_0 gibt, das sich in absoluter

Ruhe befindet und welches die ganze Welt umschließt. Es ist keineswegs nötig, eine solche phantastische Annahme zu machen; es genügt vollkommen, anzunehmen, daß in unserer näheren Umgebung ein System K_0 angenommen werden kann, in welchem das Licht sich ungefähr isotrop ausbreitet, und es ist ganz unnötig anzunehmen, daß dieses System auf große Entfernungen hinaus extrapoliert werden kann.

Es ist im folgenden belanglos, welches System in der Umgebung der Erde als K_0 -System betrachtet wird. Ich möchte nur bemerken, daß die Annahme eines solchen Systems ganz natürlich ist. Aus der Tatsache, daß wir mit Hilfe von gewöhnlichen elektromagnetischen Experimenten ein solches System nicht festlegen können, dürfen wir nicht annehmen, daß es auch in der Zukunft nie ein Experiment geben werde, das geeignet wäre, ein solches System festzulegen; ob es ein ausgezeichnetes System K_0 gibt oder nicht gibt, kann nicht vom gegenwärtigen Stand unseres Wissens abhängen.

Der folgende Gedanke hat eine gewisse Plausibilität. Es ist bekannt, daß wir experimentell feststellen können, ob ein System sich im Zustande der Beschleunigung befindet oder nicht. Die Anschauung einer „absoluten Beschleunigung im Raume“ ist aber durchaus unzufriedenstellend, und es wurde als sehr zufriedenstellend betrachtet, daß die allgemeine Relativitätstheorie die Wirkung der Beschleunigung auf ein materielles System auf die Wechselwirkung des Systems mit den großen Massen seiner Umgebung zurückführte. Es ist also augenscheinlich, daß es kein starres, von Beschleunigung freies System gibt, welches die ganze Welt umfaßt; wenn wir nämlich annehmen, daß die Materie im Universum sich in komplizierter Strömung befindet, dann bewegen sich die einzelnen, beschleunigungsfrei erscheinenden Systeme zusammen jeweils mit lokaler Materie, und entfernte lokale Systeme werden sich auf diese Weise stets in beschleunigter Bewegung zueinander befinden.

Ebenso, wie man die Beschleunigung auf ein lokales System ²⁾ beziehen kann, das die lokale Bewegung der Materie teilt, könnten wir auch Geschwindigkeit auf dasselbe System beziehen. Wir könnten z. B. annehmen, daß das Licht sich isotrop (oder beinahe isotrop) fortpflanzt, in jenem System K_0 , welches die Bewegung der umgebenden Sterne teilt. In einem System K_1 dagegen, welches sich in Translation zum System K_0 befindet, breitet sich das Licht nicht isotrop aus, aber die Anisotropie kann nicht direkt nachgewiesen werden, weil die Effekte dieser Anisotropie durch die Lorentz-Deformationen kompensiert werden.

Von dieser Auffassung ausgehend, können wir die elektromagnetischen Wellen als ein „sich Kräuseln“ des Gravitationsfeldes betrachten. Die Fortpflanzung dieser Wellen geht isotrop oder beinahe isotrop vor sich in einem genügend homogenen und stationären Gravitationsfeld. Ich bin mir der mathematischen Schwierigkeiten dieser Auffassung bewußt, aber im Augenblick will ich ja nur betonen, daß ein derartiges Modell zumindest qualitativ möglich ist, und daß wir kein Recht haben, a priori die Idee eines Systems K_0 auszuschließen.

Bevor wir die eigentliche Analyse beginnen, will ich noch eine Bemerkung einfügen.

Wir wissen aus der Relativitätstheorie, daß wir praktisch jedes unbeschleunigte System als das K_0 -System wählen können. Ein solches System ist ebenso

²⁾ lokal ist hier ein elastischer Ausdruck, er mag z. B. gedeutet werden als das umgebende galaktische System, aber da die gegenwärtigen Betrachtungen rein spekulativ sind, ist es im Augenblick nicht wesentlich, auf Details einzugehen.

geeignet wie ein anderes; tatsächlich beruhen die Bedenken gegen die Festlegung eines solchen Systems gerade auf dem Umstande, daß wir kein Mittel haben, zwischen den verschiedenen Möglichkeiten für das ausgezeichnete System zu unterscheiden. Wenn wir aber genau untersuchen, warum wir keine solche Möglichkeit haben, dann finden wir, daß unsere Unfähigkeit im wesentlichen einem Vorurteil entspringt, nämlich dem Vorurteil, daß wir die Untersuchung mit Hilfe eines kleinen, geschlossenen Apparates wie z. B. eines Interferometers erreichen wollen. Mit einer solchen Apparatur ist die Unterscheidung tatsächlich schwierig (obwohl Effekte von der Größenordnung der Ableitungen der g_{ik} auch mit einem solchen Apparat gefunden werden könnten). Es gibt aber überhaupt keine Schwierigkeit (abgesehen von Vorurteil, wenn wir es grob sagen wollen), sich im Universum umzusehen und zu bemerken, daß die uns umgebenden Sterne in einer ganz markanten Weise ein bestimmtes System auszeichnen. Tatsächlich verwenden die Astronomen viel Arbeit darauf, dieses praktisch wichtige, ausgezeichnete System zu präzisieren.

II. Kinematische Eigenschaften der Galilei- und Lorentz-Transformationen

§ 4. Relativistische Effekte. Der Relativitätstheorie, ausgehend von den negativen Ergebnissen des Michelson-Morley-Versuches und ähnlicher Versuche, gelang es, positive Effekte vorherzusagen, die sich später experimentell bestätigt fanden. Von unserem Gesichtspunkte ist der wichtigste positive relativistische Effekt die Zeitkontraktion. Wir machen von der vorrelativistischen Terminologie Gebrauch und beschreiben den Effekt in der folgenden Weise:

1. Wenn eine Uhr als Ganzes in Bewegung gesetzt wird, so verlangsamt sie sich um einen Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Die Verlangsamung wird verursacht durch die Beschleunigung.

Das experimentell tatsächlich gefundene Uhrenparadox kann auf folgende Weise beschrieben werden. Betrachten wir zwei gleich gebaute Uhren, die genau synchron laufen. Wir bewegen die eine Uhr fort, indem wir die Uhr als Ganzes beschleunigen, bis sie sich mit einer Geschwindigkeit von v bewegt (bei der Beschleunigung müssen wir darauf achten, daß wir keine zu großen Kräfte auf die Uhr wirken lassen, so daß wir die Uhr nicht permanent beschädigen). Der Gang der Uhr wird sich infolge der Beschleunigung verlangsamen. Wenn daher die Uhr sich zunächst mit der konstanten Geschwindigkeit v fortbewegt, ist ihr Gang verlangsamt. Wenn nach einer Zeit T die Uhr als Ganzes wieder zum Stillstand gebracht wird, dann wird auch der Gang der Uhr wieder hergestellt. Während der Bewegung ist aber die Uhr zurückgeblieben. Der Betrag der Zeit, den sie verloren hat, ist, falls wir die Zeiträume der Beschleunigung und Verzögerung abrechnen, gegeben durch

$$\Delta T = T(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}). \quad (10)$$

Wenn wir den obigen Ausdruck nach Potenzen von v/c entwickeln, erhalten wir

$$\Delta T \approx T v^2 / 2 c^2.$$

Es ist für unsere Überlegung unwesentlich, daß wir die Perioden der Beschleunigung und Verzögerung vernachlässigt haben. Dies kann in der folgenden Weise gesehen werden: die Störungen während dieser Perioden verursachten gewisse Phasenverschiebungen τ_1 und τ_2 . Die Größe dieser Phasenverschiebungen kann aber nicht von T abhängen, da die Effekte der Beschleunigung oder Verzögerung

nicht davon abhängen können, was früher mit der Uhr geschehen war. Unabhängig davon, welche numerischen Werte τ_1 und τ_2 haben, wird, falls T groß genug ist, der Zeitverlust, den die Uhr erlitten hat, viel größer sein als τ_1 und τ_2 , und daher gibt die Gl. (10) das dominante Glied der wirklichen Phasenverschiebung.

Das Uhrenparadoxon kann experimentell beobachtet werden mit Hilfe von schnellen Kanalstrahlen. Betrachten wir Atome mit der Emissionsfrequenz ν_0 . Wenn beschleunigt, emittieren diese Atome statt ν_0 eine andere Frequenz, die von der Richtung der Emission abhängt. Insbesondere ist normal zur Bewegungsrichtung die emittierte Frequenz

$$\nu_p = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (11)$$

Der Unterschied zwischen ν_p und ν_0 beruht einzig auf der Verlangsamung der atomaren Frequenzen durch die Beschleunigung. Wenn die Atome des Kanalstrahles jedoch wieder zur Ruhe gebracht werden, so emittieren sie wieder die ursprüngliche Frequenz ν_0 .

Der normale Doppler-Effekt wurde tatsächlich experimentell beobachtet und damit die Gl. (11) bestätigt.

Die Bestätigung der Zeitkontraktion im Falle sehr hoher Geschwindigkeiten gelang durch Versuche mit μ -Mesonen. Die μ -Mesonen sind instabile elementare Teilchen mit einer mittleren Lebensdauer von

$$\tau = 2,15 \mu \text{ sec.}$$

Das μ -Meson zerfällt in ein Elektron und neutrale Teilchen. Die Lebensdauer eines Mesons wird stark verlängert, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit $v \approx c$ bewegt. Nach der Relativitätstheorie sollte die mittlere Lebensdauer eines sich bewegenden μ -Meson gegeben sein als

$$\tau' = \tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (12)$$

Da aber der Ausdruck auf der rechten Seite von (12) kritisch von der kleinen Differenz $c - v$ abhängt, und da diese Differenz nicht direkt gemessen werden kann, kann man zunächst aus (12) nur schließen, daß

$$\tau' \gg \tau.$$

Diese Beziehung ist sicherlich erfüllt, da während einer Zeit τ ein μ -Meson sich nicht weiter als

$$c\tau = 350 \text{ m}$$

bewegen kann. Tatsächlich erreichen viele μ -Mesonen, die in der Atmosphäre in Höhen zwischen 10–20 km erzeugt werden, den Erdboden, ohne zu zerfallen. Man sieht daher, daß die mittlere Lebensdauer τ' der bewegten Mesonen wesentlich größer ist als die Lebensdauer der ruhenden μ -Mesonen. Aus den experimentellen Resultaten folgt, daß es viele Mesonen gibt, für die

$$c\tau' \gg 10000 \text{ m.}$$

Eine genauere Prüfung der relativistischen Formel erhält man mit Hilfe des relativistischen Zusammenhanges zwischen Geschwindigkeit und Impuls. Die tatsächlichen Meßresultate sind verträglich mit

$$\tau' = \frac{E}{\mu c^2} \tau,$$

wo $E = \mu c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ die relativistische Energie des Mesons bedeutet und μ die Masse des Mesons.

Während der normale Doppler-Effekt eine quantitative Prüfung der relativistischen Kontraktion für nicht allzu hohe Geschwindigkeiten ermöglicht, erhalten wir aus der Beobachtung des Mesons eine qualitative Bestätigung des relativistischen Effektes in einem Gebiet, wo der Effekt nicht zu einer kleinen Korrektur Anlaß gibt, sondern wo sich eine Zeitverkürzung um einen Faktor 10 bis 100 ergibt²⁾.

2. Der andere wichtige positive relativistische Effekt ist die Veränderung der Masse mit der Geschwindigkeit. Dieser Effekt wurde quantitativ bestätigt, er ist im engen Zusammenhang mit dem Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie.

§ 5. Galilei- und Lorentz-Transformation. 1. Ausmessung des Systems K_0 . Es war Einsteins wichtige Entdeckung, daß wir die Existenz eines Koordinatensystems und Möglichkeit der Zeitmessung nicht ohne weiteres in allen Teilen des Systems voraussetzen können. Es ist unbedingt notwendig, genaue Methoden anzugeben, wie man in dem System Koordinatenwerte fixiert, und auf welche Weise man Zeitmessungen in verschiedenen Punkten des Systems vorzunehmen hat.

Eine einfache Methode zur Ausmessung des Systems K_0 erhält man, falls man von der Voraussetzung ausgeht, daß sich das Licht in K_0 isotrop ausbreitet. Betrachten wir eine standardisierte Uhr C_0 im Ursprung O des Systems K_0 . Mit Hilfe dieser Uhr können wir nun K_0 ausmessen. Wir bestimmen zunächst die Distanz einer Reihe Punkte A, B, C von O , indem wir Lichtsignale von O nach diesen Punkten senden, und indem wir die Zeiten messen, die vergehen von der Aussendung der einzelnen Signale bis zum Wiedereintreffen der reflektierten Signale. Wir bezeichnen diese Zeitintervalle T_A, T_B, \dots und wir vergewissern uns, daß, falls wir ein Signal wiederholt zu demselben Punkt aussenden, die Zeit, in der das Signal zurückkehrt, immer wieder denselben Betrag hat, d. h. wir vergewissern uns, daß die Distanzen OA und OB, \dots von der Zeit unabhängig sind, und daß die Uhr in O gleichförmigen Gang zeigt. Die Werte der Entfernungen können auf folgende Weise berechnet werden:

$$\overline{OA} = c T_A/2, \quad \overline{OB} = c T_B/2, \dots$$

Ferner können wir die Abstände der Punkte A, B usw. voneinander auch bestimmen. Um z. B. die Distanz \overline{AB} zu bestimmen, müssen wir durch die Aufstellung geeigneter Spiegel erreichen, daß ein Lichtsignal von O nach A ausgehend nach B weitergeleitet wird und schließlich nach O zurückkehrt. Bezeichnen wir die Zeit, die dieses Signal in Anspruch nimmt, mit T_{AB} , dann haben wir für die Distanz

$$\overline{AB} = c (2 T_{AB} - T_A - T_B)/2.$$

In dieser Weise können wir ein Netz von Punkten mit bekannten relativen Entfernungen aufbauen, d. h. wir können das System K_0 ausmessen. Wir bemerken, daß im Fall von n Punkten $m = n(n-1)/2$ Distanzen auftreten. Zwischen diesen m Entfernungen sind nur $m_i = 3n - 6$ für $(n > 2)$ unabhängige Entfernungen. Die übrigen $m - m_i$ Entfernungen können mit Hilfe der Regeln der euklidischen Geometrie bestimmt werden. Falls wir experimentell finden, daß diese Beziehungen tatsächlich erfüllt sind, können wir die Gültigkeit der euklidischen Geometrie in guter Annäherung in dem so erhaltenen System K_0 annehmen. Wenn das K_0 -

²⁾ Siehe z. B. Jánosy, Cosmic Rays, II. Ausgabe, Oxford 1950.

System kein Inertialsystem ist, oder wenn starke Gravitationsfelder in K_0 auftreten, dann müssen wir starke Abweichungen von der euklidischen Geometrie erwarten.

2. Nachdem das System K_0 in der eben besprochenen Weise ausgemessen ist, können wir in den Punkten A , B usw. Uhren aufstellen und justieren. Zu diesem Zweck können wir Lichtsignale zu vorherbesprochenen Zeiten von O aussenden. Wir senden z. B. zu Zeiten $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$ Signale aus. Im Augenblick der Ankunft dieser Signale in A müssen wir die dort befindliche Uhr so einstellen, daß sie die Zeit $t = a/c, \tau + a/c, 2\tau + a/c, \dots$ zeigt. Auf diese Weise können wir in allen Teilen von K_0 Uhren justieren und synchronisieren. Ebenso wie wir den euklidischen Charakter der Ausmessung von K_0 prüfen konnten, können wir nun die Widerspruchsfreiheit der Synchronisierung der verschiedenen Uhren prüfen. Wir können fordern, daß, falls wir die Justierung der Uhr wiederholt mit einer Uhr, die sich in A , B, \dots usw. befindet, statt mit der Uhr, die sich in O befindet, vornehmen, dieser Synchronisierungsprozeß zum selben Resultat führen soll wie der ursprüngliche, den wir auf die Uhr in O anwandten. Wenn wir tatsächlich finden, daß die Forderung erfüllt ist, dann haben wir bewiesen, daß K_0 nicht nur in bezug auf die gewöhnliche räumliche Geometrie, sondern auch vom Standpunkt der vierdimensionalen raum-zeitlichen Geometrie euklidischen Charakter zeigt.

3. In der vorhergehenden Überlegung haben wir angenommen, daß die Punkte A , B , C usw. sich in konstanter Entfernung vom Punkt O befinden, und daß ihre relativen Entfernungen auch konstant sind. Wir können diese Voraussetzung fallen lassen und die Kalibrierung in der folgenden Weise durchführen: Wir schicken zur Zeit t_1 ein Signal von O nach A . Dieses Signal erreicht den (bewegten) Punkt A zu einer Zeit t' und das reflektierte Signal kommt zur Zeit t_2 nach O zurück. Wir haben dann

$$t' = (t_1 + t_2)/2$$

und die Entfernung $a(t')$ zur Zeit t' ist

$$a(t') = c(t_1 + t_2)/2.$$

Indem wir oft hintereinander solche Experimente ausführen, können wir die Entfernungen der einzelnen Punkte als Funktion der Zeit t (gemessen in O) bestimmen. Wir können ferner Uhren in den Punkten A , B usw. synchronisieren. Ein Unterschied gegenüber dem vorigen Verfahren ist, daß zur Zeit der Ankunft des Signals in A , das zur Zeit t_1 von O ausgegangen ist, wir die Zeit t_2 noch nicht kennen, und deswegen den Wert von t' erst später erfahren. D. h. die Uhr A kann nur eine gewisse Zeit nach der Ankunft des synchronisierten Signals richtiggestellt werden, nämlich erst dann, wenn t_2 bestimmt worden ist und nach A signalisiert wurde.

Bei der Justierung des nicht starren Systems wird das Resultat des Kalibrierens davon abhängen, in welchem Punkt wir die Normaluhr aufstellen. Wir bekommen ein anderes Endresultat, wenn wir z. B. mit der Uhr in A und nicht mit der Uhr in O die Kalibrierung vornehmen.

Wenn wir nämlich das Ausmessen auf die Uhr in A basieren, und wenn A sich relativ zu O mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, dann bekommen wir Phasenbeziehungen zwischen entfernten Uhren, die verschieden sind von den Phasenbeziehungen, die wir erhalten hätten, wenn wir die Kalibrierung auf O basiert hätten. Der Unterschied in den Phasenrelationen entspricht genau den Verschiebungen, die jene Lorentz-Transformation hervorgebracht hätte, die A zur Ruhe transformiert hätte.

4. Obwohl die Kalibrierung des Systems K_0 durch Lichtsignale vollkommen durchführbar ist (sie ist ja die einfache Anwendung von Radar-Methoden), ist es doch von Interesse, daß die Kalibrierung auch auf eine andere Weise durchgeführt werden kann. Die letztere Methode geht von dem Ausdruck für die Zeitkontraktion aus, sie ist aber praktisch von größerer Bedeutung als die Kalibrierung mit Hilfe der Radar-Methode.

Betrachten wir zwei Uhren, die sich beide im Ursprung O des Systems befinden. Diese Uhren sind von ähnlicher Beschaffenheit und synchronisiert. Wenn wir nun die eine der Uhren entlang der x -Achse verschieben, dann verlangsamt sich der Gang dieser Uhr um einen Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Wenn die Uhr die Entfernung A zurücklegt, dann wird sie im Laufe dieser Reise Zeit verlieren, und am Ende der Reise wird der gesamte Zeitverlust den folgenden Betrag haben

$$\Delta T = \frac{a}{v} (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}).$$

Wenn wir nach Potenzen von v entwickeln, dann bekommen wir

$$\Delta T = a v/2 c^2 + \dots$$

Wir sehen also, daß wir im Grenzfalle $v \rightarrow 0$, $\Delta T \rightarrow 0$ erwarten müssen. Wir sehen daher, daß die Störung, die die Uhr erleidet, verschwindend klein wird, falls wir die Uhr langsam genug fortbewegen. Wir können daher, falls wir genug Vorsicht gebrauchen, Uhren nach allen Teilen von K_0 transportieren, ohne die Uhren erheblich zu stören. Wir können die Entfernungen der Punkte vom Ursprung berechnen aus der Zeit des Transportes der einzelnen Uhren.

Die Tatsache, daß Uhren, wenn sie genug langsam bewegt werden, synchron bleiben, ist von praktischer Wichtigkeit. Eine Uhr im Sinne der Relativitätstheorie ist jedes geschlossene, materielle System. Wir sehen daher, daß wir solche Systeme verschieben können innerhalb unseres Systems K_0 , ohne dadurch Phasenbeziehungen zu stören, vorausgesetzt natürlich, daß die Verschiebungen genug langsam vor sich gehen. Von dieser Tatsache wird sehr oft praktischer Gebrauch gemacht.

§ 6. 2. Die Konstruktion des Systems K_1 . Wir setzen voraus, daß es uns gelungen ist, ein System K_0 auszumessen, und in diesem System die Uhren zu synchronisieren und daß dieses System sich in guter Näherung als ein euklidisches System erwiesen hat. Wir behandeln im folgenden die Frage, wie wir nun ein System K_1 erhalten können, das sich in bezug auf das System K_0 in Translation befindet.

1. Wir betrachten eine große Zahl fester Punkte in K_0 . Beispielsweise betrachten wir ein kubisches Gitter und fixieren Punkte mit einer Gitterkonstante a . Die Seiten der Würfel seien parallel zu den Richtungen der Koordinatenachsen. Wir bringen nun in die Nähe jeden Gitterpunktes einen Massenpunkt. Zu einer verabredeten Zeit t schalten wir auf jeden der Massenpunkte eine Kraft an. Die Kräfte sollen in einer früher verabredeten Weise wirken. Jede der Kräfte soll für genau dieselbe Zeit wirken, und nachher sollen alle Kräfte verschwinden. Auf diese Weise beschleunigen die Kräfte jeden der Massenpunkte in genau derselben Weise und wir erreichen, daß nach dem Aufhören der Kraftwirkungen sich jeder der Punkte mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der positiven x -Achse bewegt.

Die auf diese Weise in Bewegung gesetzten Massenpunkte bilden ein bewegtes Gitter und dieses Gitter ist ein exaktes Abbild des in K_0 fixierten Gitters. Das neu erhaltene Gitter entspricht dem Gitter, das man aus dem in K_0 befindlichen erhalten hätte, wenn man es als starren Körper beschleunigt hätte, und es dabei keine Lorentz-Kontraktion erlitten hätte. Das bewegte Gitter können wir als ein bewegtes Koordinatensystem K_1 betrachten.

Um die Frage zu beantworten, ob es möglich ist, Massenpunkte in der vorher beschriebenen Weise zu beschleunigen, möchte ich das folgende ein-dimensionale Modell als Illustration benutzen.

Betrachten wir eine Straße, in welcher in der Entfernung a Autos entlang der Straße aufgestellt sind. Die Fahrer der Autos haben Befehl erhalten, ihre Wagen in einem vorher verabredeten Augenblick in Bewegung zu setzen, ferner sie in einer vorverabredeten Weise zu beschleunigen und die Beschleunigung zu beenden, sobald der Wagen eine bestimmte Geschwindigkeit v erreicht hat. Diese Autos entsprechen genau dem System der Massenpunkte des obigen Beispiels. Die Autos selbst erfahren natürlich eine Lorentz-Kontraktion, aber nicht die Distanzen zwischen den Autos. In der Tat, nehmen wir an, daß die Koordinate des n -ten Autos, bevor es losfuhr, $x_n(0) = na$ war. Die Beschleunigung jedes der Autos nimmt dieselbe Zeit in Anspruch, da ja die Beschleunigungen in derselben Weise vorgenommen werden sollen. Wir können daher annehmen, daß jedes der Autos den Beschleunigungsprozeß während derselben Zeit t_0 (gemessen in K_0) ausführt und wir können ferner annehmen, daß während dieser Zeit t_0 jedes der Autos dieselbe Distanz a_0 zurücklegt. Daher wird zur Zeit t_0 die Koordinate des n -ten Autos gegeben sein durch $x_n(t_0) = na + a_0$. Nach dem Zeitpunkt t_0 bewegen sich die Autos mit konstanter Geschwindigkeit v (v ist wieder in bezug auf K_0 gemessen), wir haben daher für jeden Zeitpunkt $t > t_0$ in K_0

$$x_n(t) = na + a_0 + v(t - t_0),$$

daher ist die Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Autos einfach

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = a.$$

Da alles auf K_0 bezogen ist, ist diese Überlegung ganz einfach und Fragen der Transformationseigenschaften können gar nicht auftauchen. Wir haben ja bis jetzt überhaupt kein vollständiges bewegtes System eingeführt, und daher können wir Maße gar nicht auf ein anderes System als das uns zur Verfügung stehende System K_0 beziehen.

Wir bemerken dagegen, daß, falls wir die Autos mit elastischen Bändern verbinden, die elastischen Bänder jedoch so schwach voraussetzen, daß sie die Bewegung der Autos nicht beeinflussen können, dann würden diese Bänder als Folge der Beschleunigung versuchen, sich zusammenzuziehen. Dieses Zusammenziehen (Lorentz-Kontraktion!) würde jedoch durch die Bewegung der Autos verhindert werden und eine gewisse Spannung würde sich in den elastischen Bändern ergeben.

2. Übertragung der Zeitmessung. Im vorigen Abschnitt haben wir eine Methode besprochen, nach der man ein System von Punkten, die ein sich bewegendes Koordinaten-System K definieren, konstruieren kann. Um nun K_1 zu einem vollständigen Bezugssystem zu ergänzen, ist es notwendig, eine Methode der Zeitmessung in K_1 auszuarbeiten. Es gibt zwei einfache Möglichkeiten, um dies zu erreichen.

Erstens: wir können in der Nähe der Massenpunkte K_1 Uhren aufstellen und diese Uhren so regulieren, daß sie immer, wenn sie an einer der Uhren in K_1 vorbeigehen, dieselbe Zeigerstellung aufweisen wie die entsprechende Uhr in K_0 . Diese Methode der Justierung entspricht völlig der Methode, die in § 5/3 besprochen wurde, wo gezeigt wurde, wie man Uhren mit Hilfe von Lichtsignalen justieren kann.

Zweitens: dasselbe Resultat kann in einer viel direkteren Weise folgendermaßen erhalten werden: betrachten wir das in Abb. 1 gezeigte, lange zylindrische Zahnrad. Setzen wir voraus, daß die Achse dieses Zahnrades parallel zur x -Achse läuft, und daß es sich mit konstanter Geschwindigkeit um die Achse drehe. Dieses Zahnrad kann als Uhr in K_0 aufgefaßt werden. Betrachten wir ferner kleinere Zahnräder, befestigt an Massenpunkten, die nach der Beschleunigung K_1 bilden. Setzen wir voraus, daß während der Periode der Beschleunigung die kleinen Zahnräder in die Zähne des langen Zahnrades eingreifen, so daß während der Beschleunigung

der Massenpunkte die kleinen Zahnräder am langen zylindrischen Zahnrad entlang gleiten. Es soll dabei darauf geachtet werden, daß die kleinen Zahnräder ständig in das lange Zahnrad eingreifen und durch dieses getrieben werden. Nachdem die Beschleunigung zu Ende ist, können die kleinen Zahnräder durch eine kleine

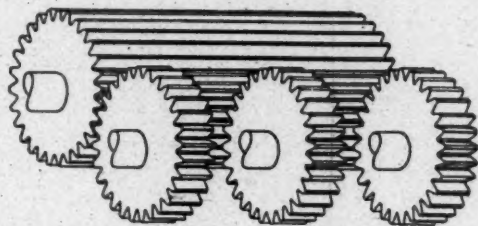


Abb. 1. Schema der Zeitübertragung mit Zahnraduhren

seitliche Verschiebung vom zylindrischen Zahnrad losgelöst werden, sie werden sich aber vermöge ihrer Trägheit weiter mit konstanter Geschwindigkeit drehen. Diese sich frei drehenden kleinen Zahnräder können nun als Uhren in K_1 betrachtet werden.

Der Vollständigkeit halber bemerken wir, daß im Laufe der Beschleunigung das lange Zahnrad eine gewisse Energie an die kleinen Zahnräder übertragen muß, um die relativistische Verlangsamung der Drehbewegung der kleinen Zahnräder zu verhindern. Wir können annehmen, daß die Masse der kleinen Zahnräder vernachlässigbar klein ist im Vergleich zum langen Zahnrad, und wir daher die Rückwirkung der kleinen Zahnräder auf das lange zylindrische Zahnrad vernachlässigen können. Jedoch können wir auch die Rückwirkung der kleinen Zahnräder auf das große Zahnrad auf folgende Weise exakt eliminieren. Wir beginnen unser Experiment mit zwei langen zylindrischen Zahnrädern und benutzen das eine Zahnrad, um die kleinen Zahnräder zu treiben, das andere dagegen als einen Piloten. Wir können nun, falls es nötig ist, auf das belastete Zahnrad solche Kräfte wirken lassen, die es zwingen, mit dem unbelasteten Zahnrad in Phase zu bleiben.

Zusammenfassend haben wir also eine Methode beschrieben, nach der man ein System K_1 konstruieren kann, welches aus Massenpunkten und Zahnraduhren besteht und welches im wesentlichen so entsteht, daß man ein Abbild von K_0 in einer völlig symmetrischen Weise beschleunigt. Das System K_1 entspricht genau der Galileischen Transformation von K_0 . Wegen der durchaus einfachen, symmetrischen Weise, in der K_1 aus K_0 erhalten wurde, können wir K_1 als die natürliche Transformation von K_0 betrachten. Die charakteristischen Züge der Lorentz-Transformation sind in dem Prozeß, durch den wir K_1 konstruiert

haben, unterdrückt worden, indem wir die Wirkung der materiellen Kräfte teils eliminiert und teils unterdrückt haben.

§ 7. Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, wie man ein materielles Bezugssystem K_0 konstruieren kann, das eine vollkommene Galileische Transformation des Systems K_0 ist. Das System K_1 ist jedoch ein sehr unbequemes Bezugssystem. Wir finden nämlich, daß 1. das Licht sich in K_1 nicht isotrop ausbreitet, und 2. daß bewegte Uhren Phasenverschiebungen erleiden, auch wenn sie sehr langsam in K_1 bewegt werden; die Phasenverschiebung verschwindet auch im Grenzfall der verschwindenden Verschiebungsgeschwindigkeit nicht.

Wir zeigen zunächst, daß diese erwähnte, unbequeme Eigenschaft in K_1 tatsächlich auftritt.

1. Daß Licht sich in K_0 isotrop ausbreitet, kann durch den Michelson-Morley-Versuch gezeigt werden. Betrachten wir nun ein Interferometer in K_0 , das aus vier unzusammenhängenden Teilen besteht (s. Abb. 2): Eine halbsilbernte Platte P , zwei Spiegel M_1 und M_2 und ein Fernrohr T . Wenn wir das System drehen, so daß die relativen Entfernungen von M_1, M_2, P und T unverändert bleiben, dann wird auch das Streifensystem in T unverändert bleiben. Wenn wir nun die vier Teile des Systems unabhängig, aber gleichzeitig beschleunigen, dann bringen wir das Interferometer in das System K_1 . Diese Beschleunigung wird aber das Streifensystem, das man in T sieht, beeinflussen. Diese Beschleunigung würde in der Tat eine Streifenverschiebung hervorrufen, die in Lichtzeit ausgedrückt folgenden Wert besitzt

$$\Delta T = l \left(\frac{4}{c} - \frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right) = -\frac{lv^2}{c^2} + \dots \quad (13)$$

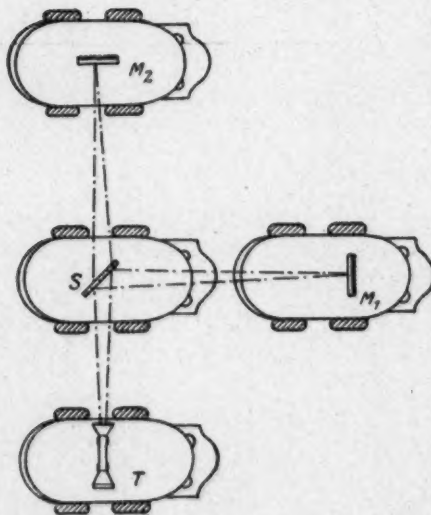


Abb. 2. Schema des Michelson-Interferometers aufgebaut aus unzusammenhängenden Teilen

Der obige Wert der Verschiebung ist nämlich genau der, den seinerzeit Michelson und Morley erwartet hatten, aber nicht fanden. Der Unterschied zwischen dem hier beschriebenen Experiment und dem wirklichen Michelson-Morley-Experiment ist nämlich der, daß das wirkliche Interferometer nicht aus unabhängigen Bestandteilen „zusammengesetzt“ ist, sondern ein festes System bildete. Wenn die Teile unseres gedachten Interferometers durch materielle Stäbe verbunden wären, dann würden die einzelnen Teile nach Vollzug der Beschleunigung durch die in den Stäben auftretenden, elastischen Kräfte verschoben werden. Wenn wir also den elastischen Kräften freies Spiel gewähren würden, dann würden sie das Interferometer im Vergleich zum System K_1 in einer solchen Weise

verzerrten, daß die Verzerrung die Phasenverschiebung (13) genau kompensieren würde.

Um dies ganz klar zu machen, betrachten wir schematisch ein Interferometer, dessen vier Bestandteile auf vier Autos montiert sind. Setzen wir nun voraus, daß diese Autos gleichzeitig in der in § 6 beschriebenen Weise losfahren. (Wir setzen voraus, daß die Autos so glatt fahren, daß die Interferenzstreifen während der Fahrt bestehen bleiben.) Das Interferometer, das auf diese Weise in Bewegung gesetzt worden ist, wird sicher eine Phasenverschiebung zeigen. Wir haben in § 6/1 darauf hingewiesen, daß elastische Bänder, die zwischen Autos gespannt sind, in Spannung geraten, wenn die Autos sich in Bewegung setzen, weil nämlich diese Bänder sich zusammenziehen versuchen, aber daran verhindert werden durch die Autos. Wenn wir jetzt die Autos sich einander soweit nähern lassen, daß die elastische Spannung aufhört, dann verschieben wir damit die Spiegel genau in der richtigen Weise, um die nach der Beschleunigung aufgetretene Phasenverschiebung rückgängig zu machen. Zusammenfassend sehen wir, daß die Lichtfortpflanzung in K_1 nicht isotrop erfolgt. Dieses Resultat setzt natürlich voraus, daß wir mit der Methode der Konstruktion von K_1 , wie sie in § 6 beschrieben wurde, einverstanden sind.

2. Ein anderer, unbequemer Zug von K_1 ist, daß eine Uhr, wenn sie mit einer noch so kleinen Geschwindigkeit w entlang der x -Achse von K_1 bewegt wird, eine endliche Phasenverschiebung erleiden wird. Die Phasenverschiebung verschwindet nicht im Grenzfall $w \rightarrow 0$. In der Tat, wenn die Uhr beschleunigt wird, so daß sie nicht mehr mit der Geschwindigkeit v , sondern mit der Geschwindigkeit $v + w$ sich bewegt, so verlangsamt sich ihr Gang durch die Änderung der Geschwindigkeit um w um einen Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2} / \sqrt{1 - (v + w)^2/c^2}$. Wir finden daher für die Phasenverschiebung, die sich nach einer Verschiebung um a einstellt

$$\Delta T = -\frac{a}{w} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - (v + w)^2/c^2}} \right) = -\frac{a v}{c^2 - v^2} + \text{Glieder in } w.$$

Daher

$$\lim_{w \rightarrow 0} \Delta T = -\frac{a v}{c^2 - v^2}, \quad w \text{ parallel } v, \quad (14)$$

d. h. die Uhr wird Zeit verlieren, wie langsam immer man sie auch in bezug auf K_1 verschiebt. Wir bemerken, daß der Ausdruck (14) genau mit dem Ausdruck (7) übereinstimmt, d. h. die auftretende Phasenverschiebung entspricht der von der Lorentz-Transformation geforderten Verschiebung.

Wenn wir nicht entlang der x -Achse, sondern z. B. entlang der y -Achse verschieben, dann wechselt die Geschwindigkeit von v auf $\sqrt{v^2 + w^2}$, und im Grenzfall $w \rightarrow 0$ tritt keine Phasenverschiebung auf.

Um die soeben beschriebene Unbequemlichkeit zu eliminieren, können wir die Uhren in K_1 absichtlich verstellen. Wir können also ein neues Bezugssystem, das wir K'_1 nennen wollen, konstruieren. Das System K'_1 wird aus K_1 gewonnen, indem wir die Uhren, deren Entfernung von der y - z -Ebene x ist, um

$$\Delta T = -\frac{x v}{c^2 - v^2}$$

verstellen.

Dieses Verstellen der Uhren bewirkt eine Änderung der Werte, die man für die Lichtgeschwindigkeit (7) erhält. Ein Lichtsignal, das sich in K_1 entlang der x -Achse fortpflanzt, braucht eine Zeit

$$t_1 = \frac{a}{c-v} \quad \text{bzw.} \quad t_2 = \frac{a}{c+v},$$

um von O nach A und zurück von A nach O zu gehen (Strecke $\overline{AO} = a$). Im neuen System K'_1 müssen wir von der Laufzeit t_1 einen bestimmten Betrag abziehen, entsprechend dem verstellten Stand der Uhr in A . Ebenso müssen wir einen bestimmten Betrag zu der Laufzeit t_2 addieren wegen der absichtlich eingeführten Phasenverschiebung zwischen Uhren in A und O , d. h. die Laufzeiten, wie sie sich mit Hilfe der Uhren in K'_1 , die verstellt wurden, ergeben, sind die folgenden

$$t'_1 = \frac{a}{c-v} - \frac{av}{c^2-v^2} \quad \text{bzw.} \quad t'_2 = \frac{a}{c+v} + \frac{av}{c^2-v^2}.$$

Daher

$$t'_1 = t'_2 = \frac{ac}{c^2-v^2}.$$

Es ergibt sich daher für die Lichtgeschwindigkeit in der positiven und negativen Lichtrichtung derselbe Wert, nämlich

$$|c'_{+x}| = |c'_{-x}| = a/t'_1 = a/t'_2 = c(1-v^2/c^2).$$

Der Wert für die Lichtgeschwindigkeit entlang der y -Achse bleibt unverändert, daher ist der Wert dieser Geschwindigkeit in K'_1

$$c'_y = \sqrt{c^2-v^2}.$$

In dem korrigierten System K'_1 erhalten wir also noch immer verschiedene Werte für die Lichtgeschwindigkeit in den x - und y -Richtungen. Diese Anisotropie kann aber eliminiert werden, wenn die Längeneinheit in der x - oder y -Richtung (oder in beiden Richtungen) in einer entsprechenden Weise verändert wird. Z. B. führt es zum Ziel, wenn wir die Längeneinheit in der x -Richtung um einen Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ verkleinern. Das sich so ergebende System mag mit K''_1 bezeichnet werden. In dem so erhaltenen System K''_1 breitet sich das Licht isotrop aus, und langsam bewegte Uhren erleiden keine Phasenverschiebung im Vergleich zur lokalen Zeit. Die Lichtgeschwindigkeit in K''_1 ist

$$c''_x = c'_y = \sqrt{c^2-v^2}.$$

Obwohl nun K''_1 ein brauchbares Bezugssystem ist, kann es noch verbessert werden, wenn wir in K''_1 den Gang aller Uhren im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ verlangsamen. Auf diese Weise erhalten wir ein System K^*_1 , in welchem die Lichtgeschwindigkeit gegeben ist durch

$$c^* = c''/\sqrt{1-v^2/c^2} = c.$$

Die Lichtgeschwindigkeit in K^*_1 hat denselben Wert wie in K_0 und als Ergebnis der Veränderungen, die zunächst von K_1 nach K'_1 , dann nach K''_1 und schließlich zu K^*_1 führten, erhalten wir ein System, in dem alle Effekte der Bewegung durch geeignete Regelung der Uhren und Veränderung der Koordinaten kompensiert worden sind. K^*_1 ist die exakte Lorentz-Transformierte von K_0 . Jedes geschlossene, materielle System, das in K_0 ruht, wird Deformationen erleiden, wenn es zu einer Geschwindigkeit v beschleunigt wird. Diese Änderungen werden be-

merkbar sein, sofern das materielle System von K_1 beobachtet wird. Die Änderungen werden dagegen unbemerkt bleiben, falls das materielle System nicht von K_1 , sondern von K_1^* aus gemessen wird. D. h. in dem System K_1^* sind die durch Beschleunigung verursachten Änderungen bereits kompensiert. Wir sind nun der Meinung, daß das System K_1^* ein System ist, in dem mit den Uhren und Meßstäben absichtlich manipuliert wurde. Diese Manipulation hat den Effekt, daß die Meßresultate in einer solchen Weise korrigiert werden, daß die Effekte der translatorischen Bewegung verschwinden. Da diese Effekte von vielen Gesichtspunkten aus uninteressant sind, und sie nur eine unnötige Komplikation bedeuten, ist es ein tatsächlicher Vorteil, das System K_1^* zu benutzen, welches von solchen Effekten frei gemacht worden ist.

III. Die Dynamik der Galilei- und Lorentz-Transformationen

§ 8. Wir sehen also, daß ein materielles, zusammenhängendes System, wie das System der Massenpunkte im ersten und der Autos im zweiten Beispiel keine Lorentz-Kontraktion erleidet, wenn es in einer geeigneten Weise beschleunigt

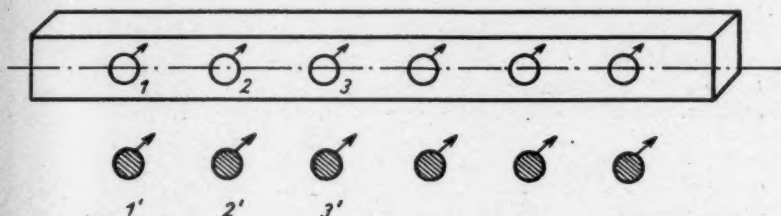


Abb. 3. Stab und Pilotteilchen, Schema des Verfahrens zur Beschleunigung eines materiellen Stabes

wird. Ein zusammenhängendes, materielles System benimmt sich anders, wie es die folgenden Beispiele klarlegen.

Betrachten wir einen elastischen Stab, der parallel der x -Achse von K_0 liegt. (Siehe Abb. 3.) Wir beschleunigen diesen Stab gleichförmig in der folgenden Weise: wir schalten in einer großen Zahl von Punkten des Stabes geeignete Kräfte ein. Um diese Kräfte geeignet bemessen zu können, placieren wir eine große Anzahl von Massenpunkten in die Nähe des Stabes und schalten gleiche Kräfte in diesen Massenpunkten in der Weise, wie wir es in § 6/1 besprochen haben, ein. Die Massenpunkte werden also beschleunigt und bewegen sich wie ein starres System. Wir betrachten nun diese Massenpunkte als Pilotteilchen und regulieren die in den Stäben angelegten Kräfte in einer solchen Weise, daß kein Teil des Stabes gegenüber den entsprechenden Pilotteilchen eine Verschiebung erleidet.

Wenn die Pilotteilchen ihre Beschleunigung beendet haben, d. h. die Geschwindigkeit v erreichen, müssen die auf die Pilotteilchen wirkenden Kräfte plötzlich verschwinden. Nach unserer Vorschrift dürfen jedoch die in den Stäben angreifenden Kräfte nicht völlig verschwinden, da durch die Beschleunigung im Stab elastische Kräfte entstanden sind, welche die Lorentz-Kontraktion des Stabes zustande zu bringen suchen. Es müssen daher solche Kräfte bleiben, die diese Ten-

denz zur Lorentz-Kontraktion balancieren und die den angespannten Zustand des Stabes aufrecht erhalten. Wenn wir nun später diese übriggebliebenen Kräfte allmählich ausschalten, dann wird der Stab kontrahieren. Das Gleichgewicht wird dann erreicht werden, wenn der Stab sich im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ verkürzt hat. Statt des elastischen Stabes können wir auch ein Netz von elastischen Stäben, die die Punkte des Systems K_0 verbinden, betrachten. Wir können auf diese Weise also ein kubisches Gitter in K_0 konstruieren. Wir können nun das ganze Gitter mit Hilfe von auf einmal eingeschalteten Kräften beschleunigen. Um Deformationen zu vermeiden, können wir wieder Pilotteilchen in die Nähe der Gitterpunkte anbringen, und die auf die Gitterpunkte wirkenden Kräfte so regulieren, daß die Bewegung der Gitterpunkte vollkommen der der freien Pilotteilchen entspricht.

Nachdem die Beschleunigung beendet ist, bilden die beschleunigten Gitterpunkte ein in dem Bezugssystem K_1 ruhendes Gitter. Als Folge der Beschleunigung treten aber elastische Spannungen in den die Gitterpunkte verbindenden Stäben auf. Diese Spannungen können zum Verschwinden gebracht werden, wenn wir dem Gitter gestatten, sich in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ zusammenzuziehen. Wir sehen also, daß das materiell zusammenhängende Gitter eine gewisse Tendenz zeigt, die Lorentz-Kontraktion automatisch hervorzu-
bringen.

Wenn wir aber das gespannte System sich entspannen lassen, wird die Kontraktion in verschiedener Weise vorsichgehen, je nachdem wie wir die Kraft abschalten. Wir könnten z. B. die Kraft plötzlich in einem Augenblick t abschalten, d. h. die Kraft wird auf einmal abgeschaltet, auf einmal in bezug auf die Uhren in K_0 oder K_1 . Nach dem Abschalten der Kraft werden die elastischen Kräfte mit einer endlichen Geschwindigkeit die Lorentz-Deformation zustande bringen. Sie ändern den Gesamtimpuls des Systems nicht und daher findet die Kontraktion um den Schwerpunkt des Systems statt. Der Schwerpunkt verschiebt sich nicht und spielt die Rolle des festen Punktes der Deformation. Falls wir annehmen, daß der Schwerpunkt des ursprünglichen Gitters mit O zusammenfiel, dann wird das Teilchen O' , welches ursprünglich mit O zusammenfiel, in den Schwerpunkt von K_1 gelangen, und die Kontraktion wird symmetrisch in bezug auf O' stattfinden.

2. Wir wollen nun weiter untersuchen, wie weit die Lorentzsche Phasenverschiebung zwischen Uhren automatisch zustande kommen kann, wenn wir ein materiell zusammenhängendes System beschleunigen. Zunächst betrachten wir Räder, die um eine Achse frei rotieren mögen, die aber in einer solchen Weise befestigt seien, daß sie entlang der Achse nicht gleiten können.

Wenn wir die Achse parallel zu sich selbst beschleunigen, dann wird sie sich genau so benehmen, wie der elastische Stab, dessen Verhalten wir weiter oben besprachen. Setzen wir voraus, daß wir die Achse in einer solchen Weise beschleunigen, daß wir die Lorentz-Kontraktion verhindern. Als Folge der Beschleunigung werden die Räder ihre Winkelgeschwindigkeit um einen Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ verringern, aber es werden keine Phasenverschiebungen zwischen den Rädern auftreten. Wenn wir nun die an der beschleunigten Achse wirkenden Kräfte abschalten und sich die Achse kontrahieren lassen, denn müssen wir die Räder als sich langsam verschiebende Uhren betrachten und nach Gl. (14) § 7/2 erwarten wir, daß sie Phasenverschiebungen erleiden, und daß die Phasenverschiebungen proportional den erlittenen Verschiebungen sein werden. Die Uhr, die ursprünglich

in der Entfernung x von O sich befand, wird sich um

$$\Delta x = x (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$$

verschieben, und die Phasenverschiebung wird

$$\Delta t' = - \frac{x (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1) v}{c^2 - v^2}$$

betragen. Die so erlittene Phasenverschiebung ist entgegengesetzt der Lorentz-schen Phasenverschiebung und falls $v \ll c$, viel kleiner als die Lorentz'sche. Wir sehen also, daß die soeben betrachtete Verbindung der Räder nicht ausreicht, um die Lorentz'sche Phasenverschiebung automatisch hervorzubringen.

Eine geeignetere Verbindung zwischen den Raduhen kann hergestellt werden, indem wir in der in Abb. 4 gezeigten Weise aufeinanderfolgende Räder durch Querleisten verbinden. Wir setzen voraus, daß diese Leisten stark genug sind, um die Räder in Phase zu halten.

Wenn wir nun das aus zwei verbundenen Rädern bestehende System beschleunigen, finden wir, daß die Verbindungsleiste sich in einer solchen Weise deformiert, daß sie die Phasen der Räder gegeneinander verschiebt, und die Lorentz'sche Phasenverschiebung genau herstellt.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß sich die Räder mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehen. Wenn wir den Radius der Räder mit ρ bezeichnen, finden wir, daß die Peripherie der Räder sich mit einer Geschwindigkeit

$$w = \omega \rho$$

senkrecht zur Geschwindigkeit v bewegt. Die rechteckige Leiste, die die Räder verbindet, wird gezwungen, sich in einer Richtung $\vec{v} + \vec{w}$, die nicht parallel zu ihren Seiten steht, zu bewegen. Die Lorentz-Kontraktion deformiert auf diese Weise die rechteckige Leiste zu einem Parallelogramm, und bringt auf diese Weise Phasenverschiebungen zustande.

Statt der Räder, die mit einer Leiste verbunden sind, könnten wir auch einen Vollzylinder, der sich frei um eine Achse bewegt, betrachten.

Die Linien konstanter Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche sind Spiralen, die sich um den Zylinder winden. Die Kontraktion entlang dieser Spiralen zwingt den Zylinder, sich zu verzerren, d. h. gerade Linien auf der Zylinderoberfläche verzerren sich zu Spiralen nach Eintreten der Lorentz-Deformation. Der so deformierte Zylinder kann als eine ausgedehnte Uhr betrachtet werden, und jeder Teil dieser Uhr ist synchron mit der sich in der Nähe befindlichen lokalen Uhr in K_1^* , daher sehen wir, daß sich der Zylinder durch die Beschleunigung in so einer Weise deformiert, daß die Deformation genau verschwindet, wenn der deformierte Zylinder statt vom System K_1 vom System K_1^* betrachtet wird.

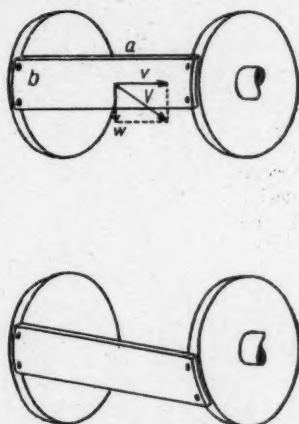


Abb. 4. Mechanismus der Phasenverschiebung von Uhren

Das heißt, falls wir das System K_1^* als die natürliche Transformierte von K_0 betrachten würden, müßten wir zu dem Schluß kommen, daß nach der Beschleunigung der Zylinder sich einem nicht-deformierten Zustande nähert. Es erscheint uns aber viel natürlicher anzunehmen, daß der Zylinder tatsächlich durch die Beschleunigung deformiert wird, also daß das System K_1^* in geeigneter Weise justiert ist, um die tatsächlichen Deformationen genau zu kompensieren.

3. Vergleich der Galilei- und Lorentz-Transformationen. Um eine Galilei-Transformierte von K_0 zu erhalten, müssen wir auf K_0 gleichförmig verteilte Kräfte gleichzeitig einschalten. Diese Kräfte führen das System K_0 direkt in das System K_1 über. Wenn die Kräfte in einem beliebigen Augenblick inmitten des Übergangs plötzlich abgeschaltet werden, dann werden sie immer das System in dem Galilei-transformierten Zustand direkt, ohne jede Relaxation, hinterlassen. Es ist ferner ganz gleichgültig, ob die Kräfte groß oder klein sind, die zur Transformation benutzt werden. Das zu transformierende System kann auch beliebig groß sein, vorausgesetzt, daß genug Vorbereitungszeit zur Verfügung steht. Die Vorbereitungszeit wird gebraucht, um den Augenblick festzusetzen, in dem die Beschleunigungen gleichzeitig in allen entfernten Punkten des Systems einzusetzen haben. Wenn an einem Ende eines Systems von einer Länge L zu einer Zeit t beschlossen wird, daß das System beschleunigt werden soll, dann kann die Information über den Zeitpunkt, in dem die Beschleunigung einsetzen soll, durch Lichtsignale in einer Zeit L/c über das ganze System verbreitet werden.

Die Überführung eines zusammenhängenden materiellen Systems von einem Galileischen Bezugssystem zu einem anderen Galileischen Bezugssystem kann in derselben Weise vor sich gehen, vorausgesetzt, daß für Kräfte gesorgt wird, die die auftretenden elastischen Kräfte kompensieren.

Im Gegensatz zu dem einfachen Übergang zwischen Galilei-transformierten Bezugssystemen ist der direkte Übergang zu Lorentz-Systemen ein komplizierter Vorgang, der stark von den materiellen Eigenschaften des zu beschleunigenden materiellen Systems abhängt. Insbesondere, wie wir sogleich zeigen werden, falls ein Übergang von dem System K_0 zu einem System K_1^* während des Überganges plötzlich gestoppt wird, so entspricht der Zustand, in dem das System belassen wird, nicht einem Lorentz-transformierten Zustande. Zumindest ist eine gewisse Relaxation vonnöten, bevor der Zwischenzustand sich zu einem Lorentz-transformierten Zustand ausgleicht. Diese Überlegungen zeigen uns, daß die Galileische Transformation die wirkliche fundamentale Form der Koordinatentransformation ist, während die Lorentz-Transformation einer korrigierten Galilei-Transformation entspricht. Die Korrekturen an Koordinaten und Uhren im Lorentz-System sind solche, die die reversiblen Deformationen, die ein materielles System während der Beschleunigung erleidet, kompensieren. Die Kompensation ist aber erst dann vollständig, sobald das System sich von den Effekten der Beschleunigung befreit hat, d. h. nachdem das System seinen Gleichgewichtszustand gefunden hat.

4. Direkter Übergang zwischen Lorentz-Systemen eines mechanisch unzusammenhängenden Gebildes. Wir beginnen nun die detaillierte Diskussion, wie sich ein unzusammenhängendes System im Verlaufe der Beschleunigung benimmt. Wir betrachten den direkten Übergang eines Systems von Massenpunkten und Punktuhren von einem System K_0 in ein System K_1^* .

Falls wir geeignete Kräfte auf die Punkte und geeignete Drehmomente auf die Uhren wirken lassen, können wir das System zwingen, beliebig vorgeschriebene Konfigurationen anzunehmen.

Wir betrachten ein kubisches Gitter, aufgebaut aus unzusammenhängenden Massenpunkten, die in K_0 ruhen, zusammen mit synchronisierten, aber unabhängigen Uhren in der Nähe jeden Gitterpunktes. Wir können nun fordern, daß in dem Zeitintervall zwischen $t = 0$ und $t = t_1$ das System in eine K_1^* entsprechende Konfiguration umgeändert werden soll. Das heißt, die Punkte sollen beschleunigt und der Gang der Uhren verlangsamt werden, so daß das ganze System von Punkten und Uhren in einen Lorentz-transformierten Zustand umgeordnet werden soll. Diese Umordnung kann kontinuierlich vor sich gehen durch eine Kette von Zwischenanordnungen. Es gibt eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Ketten, durch die dies erreichbar ist. Im allgemeinen werden diese Ketten von Umordnungen derart beschaffen sein, daß im Laufe der Umordnung das System nicht als Lorentz-Transformation der ursprünglichen Anordnung angesehen werden kann. Wir untersuchen nun, wieweit es überhaupt möglich ist, durch eine kontinuierliche Kette von Lorentz-Transformierten der ursprünglichen Anordnung zu gehen und endlich in der K_1^* entsprechenden Ordnung anzulangen. Um diese Untersuchung durchzuführen, ist es zweckmäßig, zwei Punkte des Systems K_0 auszuwählen und deren Bewegungen zu verfolgen. Betrachten wir also eine Punktuhr M_0 , die ihre Laufbahn im Punkt $x = 0$ beginnt und eine andere Punktuhr M_a , die ihre Reise vom Punkt $x = a$ beginnt. Wir beschleunigen nun M_0 in so einer Weise, daß seine Geschwindigkeit zur Zeit t $v(t)$ wird. Dabei ist

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ v & t > t_1; \end{cases}$$

die x -Koordinate von M_0 wird also gegeben sein durch

$$x_0(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Wenn wir verlangen, wie dies gewöhnlich geschieht, daß

$$x_0(t) = vt \text{ für } t > t_1,$$

d. h. wenn wir verlangen, daß M_0 sich im Ursprung des Systems K_1^* befinden soll, dann muß für einen bestimmten Teil des Intervalls $0 < t < t_1$ $v(t)$ größer als v sein, d. h. für eine gewisse Zeit muß die Geschwindigkeit einen den Endwert übersteigenden Wert annehmen, damit im Endresultat M_0 in den Ursprung von K_1^* gelangen kann.

Wegen der Lorentz-Kontraktion muß M_a im Laufe seiner Bewegung \bar{M}_a immer näher rücken; die x -Koordinate von M_a muß also gezwungen werden, die folgende Zeitabhängigkeit anzunehmen

$$x_a(t) = \int_0^t v(t) dt + a \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}.$$

Die Geschwindigkeit von $x_a(t)$ ist daher

$$V_a(t) = \frac{dx_a(t)}{dt} = v(t) + a \frac{d}{dt} (\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}).$$

Daher im allgemeinen

$$V_a(t) \neq v(t).$$

Im besonderen bemerken wir, daß für genügend große a -Werte die Korrektur so groß werden kann, daß $V_a(t)$ den Wert der Lichtgeschwindigkeit übersteigt. Die Ganggeschwindigkeiten der Uhren M_0 und M_a müssen auch ständig beeinflusst werden, damit die Uhren zu einer Zeit t die folgenden Werte zeigen

$$t_0(t) = t \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$$

und

$$t_a(t) = \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} \left(t - \frac{a v(t)}{c^2 - v(t)^2} \right).$$

Wenn wir die obigen Ausdrücke nach der Zeit t differenzieren, sehen wir, daß

$$\frac{dt_0(t)}{dt} = \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} + t \frac{d}{dt} \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$$

$$\frac{dt_a(t)}{dt} = \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} + t \frac{d}{dt} \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} - a \frac{d}{dt} \frac{v(t)}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}}.$$

Beide Ganggeschwindigkeiten unterscheiden sich von $\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$ der Ganggeschwindigkeit einer Uhr in einem stationären System. Wir sehen also, daß wir zwar unser System durch solche Konfigurationen führen können, die in jedem Augenblick dem Lorentz-System entsprechende Lagen der Gitterpunkte und Zeigerablesungen der Uhren besitzen. Die Bewegungsgeschwindigkeit der Punkte und die Ganggeschwindigkeiten der Uhren dagegen unterscheiden sich von den entsprechenden Geschwindigkeiten im stationären Lorentz-System. Für genug große Werte von a kann sogar $\frac{dt_a(t)}{dt}$ negative Werte annehmen, d. h. eine Uhr, die genügend weit vom Zentrum entfernt ist, muß während der Umordnung rückwärts gedreht werden. Wenn wir also in einem Augenblick $t' < t_A$ alle treibenden Kräfte und Momente abschalten würden, dann würden wir finden, daß die Punkte und die Uhren in diesem Augenblick in solchen Lagen wären und solche Ablesungen zeigen würden, die einer Lorentz-transformierten Anordnung von K_0 entsprechen würde, aber diese Anordnung würde wegen der Trägheit keine solche bleiben. Nachdem die Beschleunigung aufgehört hat, würden die Teilchen sich mit der konstanten Geschwindigkeit, die sie im Augenblick der Abschaltung der Kräfte hatten, weiter bewegen. Deswegen würde z. B. der Punkt M_a eine Geschwindigkeitskomponente in der Richtung von M_0 aufzeigen, und die Uhren M_a und M_0 würden sich also stetig näherkommen. Ebenso würden die Uhren M_a und M_0 im Augenblick des Ausschaltens der Kräfte zwar die richtige Phasenverschiebung zeigen, aber beide würden verschiedene, falsche Ganggeschwindigkeiten haben, keine der beiden Uhren würde nämlich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{1 - v(t')^2/c^2}$ gehen, die der Uhr eines Lorentz-Systems entspricht, das sich mit der Geschwindigkeit $v(t')$ bewegt.

Wir sehen also, daß es unmöglich ist, stetig das K_0 -System in ein K^* -System so umzuordnen, daß alle Zwischenlagen streng Lorentz-Systemen entsprechen.

Wenn wir ein materiell zusammenhängendes System betrachten, dann finden wir, daß der Beschleunigungsprozeß ganz kompliziert aussieht. Die Details des Übergangsprozesses hängen wesentlich von der Art ab, wie wir das System beschleunigen, aber auch von den elastischen Eigenschaften des beschleunigten Systems. Zunächst muß darauf achtgegeben werden, daß weder die angewandten Kräfte, noch die entstehenden elastischen Spannungen gewisse Grenzen überschreiten. Zu große Kräfte würden nämlich permanente Deformationen verur-

sachen. Wenn zu starke Kräfte angewandt werden, dann wird das System im Endresultat einen solchen Endzustand erreichen, in dem sogar von K_1^* gesehen Deformationen zu bemerken sind.

5. Stationäre Beschleunigung. Wenn wir vorsichtig nur mit sehr schwachen Kräften arbeiten, dann können wir das folgende Verfahren betrachten: wir beschleunigen alle Teile des Systems durch separat angewandte Kräfte, bis wir eine kleine Geschwindigkeit Δv erreichen. Nachdem die Beschleunigung vollzogen ist, warten wir, bis das System sich von den aufgetretenen elastischen Spannungen entspannt (d. h. wir warten, bis die Kontraktion im Verhältnis $1:\sqrt{1-(\Delta v)^2/c^2}$ aufgetreten ist und im Falle eines rotierenden Systems auch bis eine gewisse Verzerrung eingetreten ist.) Nachdem das System sein Gleichgewicht wiedererlangt hat, können wir wieder dieselbe Beschleunigung einsetzen und beschleunigen, bis das System die Geschwindigkeit $2\Delta v$ erreicht. Danach schalten wir die Beschleunigung wieder ab und warten, bis die Entspannung sich vollzieht. Auf diese Weise können wir Schritt für Schritt bis zum endgültigen Zustand mit der Geschwindigkeit v fortschreiten. Je kleiner die einzelnen Schritte, desto kleiner werden die zeitweiligen Abweichungen des Systems vom Gleichgewichtszustand sein. Wir können natürlich diesen Prozeß der Beschleunigung kontinuierlich machen, und wir erhalten dann einen Prozeß, in dem das System ständig beschleunigt wird, und es die ganze Zeit etwas hinter dem Gleichgewichtszustand zurückbleibt. Dieses Zurückbleiben kann beliebig klein gemacht werden, indem die Beschleunigung genügend klein gewählt wird.

Wir können daher ein materielles System so beschleunigen, daß die augenblickliche Konfiguration des Systems mit beliebiger Genauigkeit der Lorentz-Transformation der ursprünglichen Konfiguration entspricht.

Die Größenordnung der Beschleunigung, die erlaubt werden kann in einem System, so daß sich das System ständig in der Nähe des Gleichgewichtszustandes befindet, hängt ganz und gar von den elastischen Eigenschaften und von der Größe des Systems ab. Im Falle der Beschleunigung in kleinen Dosen sind die Zeiten, die nötig sind, um die Entspannung zu ermöglichen, wenigstens von der Größenordnung der Zeit, die eine elastische Welle benötigt, um das System zu durchqueren, sie kann aber viel größer sein, falls die Frequenzen der elastischen Schwingungen des Systems klein sind.

Wenn wir ein materielles System in der eben betrachteten stationären Weise beschleunigen, finden wir, daß sich die Konfiguration des Systems durch eine kontinuierliche Kette von Lorentz-Transformationen der ursprünglichen Konfiguration bewegt, daß aber die Geschwindigkeiten der einzelnen Teile aus zwei Komponenten bestehen, erstens aus der tatsächlichen Lorentz-transformierten Bewegung und zweitens aus der Änderungsgeschwindigkeit, hervorgerufen durch die stetige Änderung des Lorentz-Systems.

Wenn wir also die tatsächlichen Bewegungsgeschwindigkeiten der Teile eines Systems betrachten, dann sehen wir, daß sich das System im Übergangsstadium keineswegs in Lorentz-transformierte Systeme einstellt, sondern erst dann, wenn der Beschleunigungsprozeß beendet ist.

Genau so wie im materiell unzusammenhängenden System würde das System, wenn die Beschleunigung plötzlich abgeschaltet würde, wegen der relativen Bewegung seiner einzelnen Teile nicht seine augenblickliche Konfiguration aufrecht erhalten, es würde in Schwingungen geraten und erst nach dem Ablauf eines kom-

plizierten Vorganges sich in die entspannte Lorentz-transformierte Konfiguration einstellen. Diese Oszillationen können bis zu einem gewissen Grade vermieden werden, wenn die Kräfte nicht plötzlich, sondern allmählich abgeschaltet werden.

Statt ein System langsam zu beschleunigen, so daß die elastischen Kräfte die jeweilige Deformation zustande bringen können, kann man auch ein System so plötzlich beschleunigen, daß die elastischen Kräfte überhaupt keine Zeit haben, während des Beschleunigungsprozesses in Aktion zu treten. In dem letzteren Falle tritt zunächst überhaupt keine Deformation auf, sondern das System erfährt eine vollkommene Galilei-Transformation und nur nachträglich, unter der Einwirkung der elastischen Kräfte, setzt die Deformation ein. Es treten möglicherweise Oszillationen auf, aber im Endresultat stellt sich das System in eine K_1^* entsprechende Konfiguration ein.

6. Das Benehmen eines mechanischen Systems unter dem Einfluß der Beschleunigung scheint uns sehr klar die physikalischen Eigenschaften der Lorentz-Transformation aufzuzeigen.

Ein mechanisches System, welches sich in K_0 in Ruhe befindet, verliert seinen Gleichgewichtszustand, sobald es in Bewegung gesetzt wird.

Der neue Gleichgewichtszustand muß durch die Wirkung der inneren, elastischen Kräfte erlangt werden, die ihrerseits ausgelöst werden durch den Zustandswechsel, den die Beschleunigung des Systems hervorruft.

Die Beschleunigung bringt eine Änderung des inneren Zustandes des Systems hervor, d. h. löst elastische Kräfte aus, und es ist die Aufgabe dieser elastischen Kräfte, den neuen Gleichgewichtszustand, der dem neuen physikalischen Zustand entspricht, herbeizuschaffen.

Der Zustandswechsel, den die Beschleunigung bewirkt, mag verglichen werden mit dem Zustandswechsel eines mechanischen Systems, den ein Temperaturwechsel hervorbringt. Wenn wir mechanische Systeme allmählich erhitzen, dann wird sich das System ausdehnen, und wir können die Ausdehnung als das Eintreten des Gleichgewichts im geänderten Zustand auffassen.

Die Rolle der elastischen Kräfte wird aber besonders klar, wenn wir ein ganz plötzliches Anwachsen der Temperatur eines großen elastischen Körpers betrachten. Wenn dieser Temperaturzuwachs in einer genügend kurzen Zeit vor sich geht und den ganzen Körper gleichförmig umfaßt, dann wird vermöge der Trägheit des Körpers die Temperatur nur den inneren Druck vergrößern, aber dieser Druck entsteht so plötzlich, daß die Zeit seines Entstehens nicht lang genug ist, um Gleichgewicht herzustellen. Deswegen wird, erst nachdem die Temperatursteigerung bereits vor sich gegangen ist, der innere Druck allmählich die Trägheit des Systems überwinden und allmählich Deformationen hervorrufen, bis im Endresultat Gleichgewicht zwischen Wärmebewegung und elastischen Kräften im Zustand höherer Temperatur hergestellt wird.

Wir können daher Systeme in den Zustand höherer Temperatur „hineinwerfen“. Wir erwarten in diesem Falle, daß die Deformation des Systems hinter der tatsächlichen Erhöhung der Temperatur zurückbleibt. Das Zurückbleiben hängt vollkommen von den mechanischen Eigenschaften des Systems ab.

Genau in derselben Weise können wir ein mechanisches System in einen Zustand der Translation „hineinwerfen“ durch plötzliches Einschalten von gleichmäßig verteilten Kräften. Der translatorische Zustand kann erreicht werden ohne Deformation. Die Lorentz-Deformation bildet sich nur später aus durch die Wirkung der dem neuen Zustand entsprechenden, veränderten inneren Kräfte.

Ebenso wie im Falle des Erhitzens wird die Deformation erst nach der Zustandsänderung eintreten. (Der Zustand selbst wird charakterisiert durch die Geschwindigkeit in bezug auf das System K_0 .) Die Größe des Zurückbleibens wird vollkommen bestimmt von den mechanischen Eigenschaften des Systems.

Diese Analogie unterstreicht unsere Interpretation der Lorentz-Deformation als einer Deformation, die durch einen inneren Zustandswechsel hervorgerufen wird.

IV. Der Mechanismus der Lorentz-Deformation

§ 9. Wir haben im vorigen Abschnitt gezeigt, daß in einem materiellen System, das in translatorische Bewegung gebracht wird, eine gewisse Zustandsänderung eintritt. Diese Zustandsänderung ist der Zustandsänderung, die durch eine Änderung der Temperatur hervorgerufen wird, etwas ähnlich. Der Zustandswechsel hebt das Gleichgewicht der inneren Kräfte auf und ist daher von einer Deformation des Systems gefolgt. Die Deformation schreitet fort, bis eine neue Gleichgewichtslage hergestellt ist. Der Mechanismus dieses Zustandswechsels kann unschwer verstanden werden.

Die Lorentz-Deformationen sind durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der wirkenden Kräfte bedingt.

Alle inneren Kräfte eines Systems können abgeleitet werden von interatomaren Kräften, und diese sind im wesentlichen quantisierte elektromagnetische Kräfte; d. h. die Kräfte, die ein System zusammenhalten, bestehen im wesentlichen aus elektromagnetischen Kräften, die selbst mit Lichtgeschwindigkeit fortgepflanzt werden.

Die genaue Weise, in der aus der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkung die Lorentz-Deformation abgeleitet werden kann, kann besonders klar gezeigt werden mit Hilfe der bekannten Ableitung des Feldes einer bewegten elektrischen Ladung mit der Methode der verzögerten Potentiale (aber ohne explizite Verwendung der Lorentz-Transformation). Die verzögerten Potentiale können auf folgende Weise aufgeschrieben werden

$$\Phi = \int \left[\frac{q}{r} \right] dv, \quad A = \int \left[\frac{qv}{r} \right] dV.$$

Die angedeutete Integration soll über die Ladungsdichte innerhalb des Teilchens erstreckt werden, und die viereckige Klammer soll andeuten, daß die Ladungsdichten usw. zu verzögerten Zeiten eingeführt werden müssen. Nachdem die Berechnung des Feldes für eine ausgebreitete Ladungsverteilung durchgeführt wurde, kann man zur Grenze der unendlich wenig ausgedehnten Ladungsverteilung übergehen. Man kann auf diese Weise das Feld einer bewegten Punktladung berechnen. Die detaillierte Rechnung zeigt⁴⁾, daß das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung, berechnet aus den verzögerten Potentialen, genau dem Lorentz-transformierten Coulombfeld einer statischen Ladung entspricht. Insbesondere findet man, daß das so berechnete Feld in der Bewegungsrichtung um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzt erscheint, d. h. die Berechnung, die die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt, führt genau zu dem Lorentz-deformierten Feld, ohne direkte Bezugnahme auf die Lorentz-Transformation oder auf die Relativitätstheorie, d. h. die

⁴⁾ Siehe z. B. W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation*, 2nd ed. Oxford 1949, S. 19–22.

Lorentz-Deformation des statischen Feldes einer Ladung kann völlig erklärt werden aus der Retardation, d. h. die Lorentz-Deformation ist eine direkte Folge der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Feldes. Statt einer einfachen Ladung können wir ein kompliziertes System betrachten, das aus mehreren Teilchen besteht, welche aufeinander wirken und deren Wirkungen sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Wenn wir ein solches System beschleunigen, ohne es zu deformieren, dann stören wir das Gleichgewicht zwischen den wirkenden Kräften. Die Wirkungen in einem Punkt *A*, die aus den Punkten *B*, *C* . . . usw. kommen, kommen von den retardierten Stellungen. d. h. die Beziehungen zwischen den verschiedenen Teilen des Systems werden durch die Beschleunigung gestört. Wenn wir aber das System der Lorentz-Transformation entsprechend umordnen, dann eliminieren wir automatisch alle jene Asymmetrien, die durch die Bewegung der Teile des Systems entstehen, und auf diese Weise erhalten wir wieder eine Gleichgewichts-anordnung.

Betrachten wir als Beispiel für ein solches System ein Wasserstoffmolekül. Die Entfernung zwischen den Protonen innerhalb dieser Moleküle kann berechnet werden, indem wir die Energie des Systems als Funktion der Entfernung der Protonen betrachten. Die Entfernung, für die die Energie ihr Minimum erhält, ist die Gleichgewichtsentfernung.

Eine ähnliche Rechnung, jedoch viel komplizierter, könnte für den Fall zweier sich bewegender Protonen ausgeführt werden. Das Feld der sich bewegenden Protonen und das der zwei Elektronen müssen aus den retardierten Potentialen ausgerechnet werden. Die erhaltene Energie hat ihr Minimum für die Gleichgewichts-Entfernung. Ohne diese Rechnung im Detail durchzuführen, können wir ihr Resultat ohne weiteres vorhersagen. Da die Quantentheorie mit der Relativitätstheorie in Einklang steht, kann das Problem in der folgenden Weise behandelt werden. Wir transformieren das System der zwei bewegten Protonen mit Hilfe einer Lorentz-Transformation zur Ruhe. Wir betrachten aber diese Transformation nicht als eine wirkliche Transformation, sondern als einen mathematischen Trick, der in der Einführung gewisser neuer Variablen besteht. Die Rechnung kann nun einfach mit Hilfe dieser neuen Variablen ausgeführt werden, und am Ende kehren wir zu den alten Variablen zurück mit Hilfe der umgekehrten Lorentz-Transformation. Die Lorentz-Transformation spielt in diesen Überlegungen nur die Rolle eines mathematischen Hilfsmittels, das es ermöglicht, die Rechnungen verhältnismäßig einfach durchzuführen. Das Resultat dieser Rechnung ist aber selbstverständlich. Es zeigt, daß das bewegte Wasserstoffmolekül in der Bewegungsrichtung um einen Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kontrahiert. Diese Kontraktion kann also als die Wirkung der Retardation betrachtet werden.

Man kann also schließen, daß der innere Zustandswechsel, den wir am Ende des vorigen Paragraphen diskutierten und der für die Lorentz-Deformationen verantwortlich ist, aus der Retardation der inneren atomaren Kräfte völlig erklärt werden kann.

§ 10. Obwohl es selbstverständlich ist, daß in einem materiellen System die atomaren Kräfte durch ihre endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit die Lorentz-Deformationen zustande bringen, wollen wir dies trotzdem an einem schematischen Modell für ein Kristallgitter besprechen.

Betrachten wir also das folgende, völlig schematische Modell eines eindimensionalen Gitters. Nehmen wir an, daß die Gitterpunkte 1, 2, 3, usw. äquidistant angeordnet sind. Die Entfernung zwischen benachbarten Gitterpunkten sei a . Setzen wir voraus, daß jeder Gitterpunkt periodisch Lichtimpulse aussendet in Zeitintervallen der Länge t . Wir nehmen nun an, daß diese Impulse die Rolle der inneren Kräfte des Gitters spielen. Wir nehmen an, daß die Gitterenergie ein Minimum erreicht, falls Impulse, die von den verschiedenen Gitterpunkten herühren, gleichzeitig und in Gitterpunkten zusammentreffen, d. h. wenn die Impulse gleichzeitig von allen Gitterpunkten zu den Zeiten $t = 0, a/c, 2a/c, \dots$ usw. emittiert werden, dann soll die Energie ein Minimum haben.

Wenn wir nun das Gitter deformieren, z. B. komprimieren, dann stören wir die Phasenbeziehungen, und in dem deformierten Zustand werden die Impulse nicht mehr gleichzeitig und nicht in den Gitterpunkten zusammentreffen, sondern die Zeitpunkte des Zusammentreffens der einzelnen Signale werden über ein kurzes Zeitintervall gestreut sein, und die Punkte, in denen die Signale zusammentreffen, werden auf die Umgebung der Gitterpunkte zerstreut sein. Daher bewirkt nach unserer Auffassung die Kompression des Gitters ein Anwachsen der Energie. Von diesem Anwachsen der Energie können wir z. B. den Elastizitätsmodul des Gitters ausrechnen.

Wenn nun unser Gitter parallel zu der eigenen Richtung in Bewegung gesetzt wird, indem jeder Gitterpunkt einzeln beschleunigt wird, dann werden die Phasenbeziehungen der Impulse gestört, ähnlich wie sie gestört wurden im Falle der Kompression. Wenn wir nun annehmen, daß die Häufigkeit der Emission der Impulse um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ sinkt (relativistische Verlangsamung von Uhren), dann finden wir, daß die Energie des bewegten Gitters dann ein Minimum erreicht, falls 1. die Gitterkonstante um einen Faktor $a\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzt wird, 2. wenn die Phasen der Emissionen der Impulse um die Lorentz-Phasenverschiebung gegeneinander verschoben werden, so daß der Phasenunterschied der Emissionen durch zwei benachbarte Gitterpunkte sich um $\Delta t = -\frac{av}{c^2 - v^2}$ unterscheidet.

Wenn dagegen das Gitter senkrecht zu seiner eigenen Richtung in Bewegung gesetzt wird, dann wird die Verlängerung des Weges, den die Impulse von einem Gitterpunkt zum anderen zurückzulegen haben, genau kompensiert durch den verlangsamten Gang der Uhren, und daher wird das Gleichgewicht durch eine derartige Bewegung senkrecht zu der Gitterrichtung nicht beeinträchtigt. Eine Beschleunigung in eine andere Richtung kann in ähnlicher Weise behandelt werden.

Das obige Modell zeigt in einer recht primitiven Weise den Zusammenhang zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inneren Kräfte und der Lorentz-Deformation. Wir möchten noch auf die folgende Eigenschaft dieses Modells aufmerksam machen.

Denken wir uns ein Interferometer, das aus zwei Stäben OA und OB , die miteinander einen rechten Winkel einschließen, konstruiert ist. Die Längen der Stäbe seien $OA = OB = na$, d. h. nehmen wir an, daß beide Stäbe aus den n Gliedern einer Gitterkette bestehen. Ein Lichtsignal, das von O nach A geht und wieder nach O zurückreflektiert wird, braucht eine Zeit $2na/c$. Dieselbe Zeit benötigt ein Signal, um von O nach B und zurück zu kommen. Wenn zwei solche Signale in Phase mit den inneren Impulsen losgehen, dann bleiben sie während dieser Wege auch in

Phase mit den Impulsen. Wenn wir nun das System in Bewegung setzen, dann wird sich das System so verändern, daß die Impulse, die von verschiedenen Orten kommen, weiterhin sich in den Gitterpunkten treffen werden, d. h. wenn Lichtsignale ihren Weg $O-A-O$ und $O-B-O$ im beschleunigten System zurücklegen, dann werden sie auch dort, sofern das System völlig relaxiert ist, in Phase mit den inneren Impulsen laufen, und da das System sich so eingestellt hat, daß sich die Impulse noch immer in den Gitterpunkten treffen, so werden sich auch die rückkehrenden Lichtsignale genau im Punkt O treffen. Das heißt die Deformationen, die das Gitter erleidet, kompensieren genau die Geschwindigkeitsänderungen der Signale in den Richtungen OA und OB .

Dieses Experiment kann auch so gedeutet werden, daß, wenn wir die Lichtgeschwindigkeiten in den Richtungen OA und OB messen, dann tun wir in der Tat nichts anderes, als daß wir die Geschwindigkeit des äußeren Lichtsignals mit der Geschwindigkeit der inneren Impulse in derselben Richtung vergleichen. Das Resultat zeigt daher bloß, daß im Gleichgewichtszustand das äußere Lichtsignal sich in genau derselben Weise fortpflanzt wie die inneren Impulse. Von diesem Gesichtspunkt gesehen erscheint das Ergebnis des Michelson-Morley-Ver-suches einigermaßen trivial.

§ 11. Die Diskussion des vorigen Paragraphen zeigt, daß ein materielles System, das durch solche Kräfte zusammengehalten wird, die sich in bezug auf das System K_0 isotrop mit einer Geschwindigkeit c ausbreiten, eine Lorentz-Deformation erleidet, wenn es in translatorische Bewegung in bezug auf K_0 gebracht wird. Wenn wir das Argument umdrehen, können wir behaupten, daß ein System, das Lorentz-Deformationen zeigt, von solchen inneren Kräften zusammengehalten werden muß, die sich isotrop mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Betrachten wir nun eine hypothetische Art von Materie, die mit solchen Kräften zusammengehalten wird, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit C größer ist als c . Ein solches System würde auch eine Art von Lorentz-Deformationen zeigen, aber in allen Ausdrücken, die sich auf diese hypothetische Art von Materie beziehen, müßte in den Formeln c durch C ersetzt werden. Die Längenkontraktion, die diese Art von Materie erleidet, würde z. B. durch $\sqrt{1-v^2/C^2}$ statt $\sqrt{1-v^2/c^2}$ gegeben sein.

Es wird oft behauptet, daß man, falls eine physikalische Wirkung mit einer Geschwindigkeit $C > c$ gefunden werden würde, die Relativitätstheorie völlig aufgeben müßte. Unsere Überlegungen zeigen aber, daß dies nicht der Fall ist. Nach der Auffassung, die wir in diesem Artikel auseinandergesetzt haben, bedeutet die Geschwindigkeit c einfach die tatsächliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit jener Wirkungen, die die gewöhnliche Materie zusammenhalten. Wenn sich daher ein materieller Körper mit einer Geschwindigkeit $v < c$ bewegt, dann müssen sich die inneren Asymmetrien, die durch die relativ zum Körper anisotrope Fortpflanzung der Kräfte entstehen, ausgleichen. Dieser Ausgleich geht in einer solchen Weise vor sich, daß sich die Teile des Körpers gegeneinander verschieben und eine solche Deformation entsteht (d. h. Lorentz-Deformation), die effektiv die Anisotropie kompensiert.

Man muß annehmen, daß diese Deformationen nicht nur in materiellen Systemen, die aus vielen Elementarteilchen aufgebaut sind, stattfinden, sondern auch irgendwie in der inneren Struktur der Elementarteilchen selbst, da die Elementarteilchen als solche sich in einer Lorentz-invarianten Weise benehmen.

Wenn die Teile eines Systems sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen würden, dann gäbe es keine solche Deformation, die die Anisotropie zu kompensieren instande wäre. Es kann leicht eingesehen werden, daß im letzteren Falle die Impulse sich relativ zum Körper nur in eine Richtung fortpflanzen, und daher kein Gleichgewicht zwischen sich hin- und herbewegenden Kräften bestehen kann.

Die Energie eines Körpers, dessen inneres Gleichgewicht so tiefgehend gestört wird, muß als sehr groß angenommen werden, d. h. wir schließen, daß es zwar vielleicht nicht ganz unmöglich wäre für ein materielles System, sich mit Überlichtgeschwindigkeit zu bewegen, aber in so einem Falle müßte die Energie des Systems außerordentlich groß werden, wenn auch nicht unbedingt unendlich groß. Auf alle Fälle bleibt ein qualitativer Unterschied zwischen Überlicht- und Unterlichtgeschwindigkeiten. Für ein System, das sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt, kann es nämlich keinen Gleichgewichtszustand geben.

Wenn wir diese Argumente zusammenfassen, können wir sehen, daß die Relativitätstheorie die Gleichgewichtszustände materieller Systeme, die sich in Translation befinden, richtig beschreibt. Daß diese Beschreibung tatsächlich richtig ist, wird durch ein reiches, experimentelles Material bestätigt, und diese richtige Deutung der experimentellen Ergebnisse würde ihren Wert auch dann nicht verlieren, wenn in irgendeinem entfernten Teil des Universums solche Materie existierte, die durch mit Überlichtgeschwindigkeit fortgepflanzte Kräfte zusammengehalten würde.

Es wird auch oft behauptet, daß die Relativitätstheorie, falls man eine Wirkungsgeschwindigkeit $C > c$ finden würde, so abgeändert werden müßte, daß in der modifizierten Theorie c durch C zu ersetzen wäre. Die letztere Behauptung trifft nach unserer Meinung auch nicht zu. Die Lorentz-Deformationen werden richtig gegeben, wenn man die Geschwindigkeit c benützt. Wenn wir nun Koordinaten mit einer „Lorentz-Transformation“ transformieren würden, in der c durch C ersetzt wäre, dann würde diese Transformation einfach ungeeignet sein, materielle Systeme zu beschreiben. Die Tatsache, daß die gewöhnliche Lorentz-Transformation materielle Systeme richtig beschreibt, genügt schon, um die Relativitätstheorie zu rechtfertigen — und von diesem Standpunkt aus ist es ganz gleichgültig, ob es Formen der Materie gibt, die von den der gewöhnlichen, uns bekannten Materie abweichen.

§ 12. Zum Schluß wollen wir noch die folgende Frage besprechen: die Relativitätstheorie gibt die Transformationseigenschaften von ganz verschiedenen physikalischen Größen an — wie weit können diese Transformationseigenschaften als reine Retardationseffekte angesehen werden?

Wie wir schon ausgeführt haben, kann das Feld einer bewegten Ladung allein aus der Retardation abgeleitet werden; daher kann die Transformation eines elektromagnetischen Feldes völlig aus der Retardation abgeleitet werden. Zusammenhängende Materie wird im wesentlichen durch retardierte Kräfte zusammengehalten, daher können die Lorentz-Kontraktion und die Lorentz-Phasenverschiebungen direkt aus der Retardation abgeleitet werden.

Die Änderung der Masse mit der Geschwindigkeit kann wahrscheinlich aus der Retardation abgeleitet werden, vorausgesetzt, daß auch das Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie postuliert wird. Die elektromagnetische Energie eines Systems wird nämlich im Falle der Translation um einen Faktor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ vergrößert. Ein ähnliches Anwachsen des nicht elektromagnetischen Teiles der

Energie kann wohl auch vorausgesetzt werden und in dieser Weise erhalten wir das Anwachsen der Masse mit der Geschwindigkeit.

Die Verzögerung des Ganges von Uhren haben wir vorläufig als experimentelle Tatsache postuliert, jedoch ist dieser Effekt mit anderen, relativistischen Effekten eng verbunden. Mit Hilfe eines Modelles wollen wir illustrieren, daß unter gewissen Umständen diese Verzögerung automatisch ist. Betrachten wir zunächst ein Rad, das sich vermöge seiner Trägheit gleichförmig um eine Achse dreht. Das Rad sei so befestigt, daß es entlang der Achse nicht gleiten kann. Wenn wir nun die Achse parallel zu sich selbst beschleunigen, dann wächst die Masse des Rades um einen Faktor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, und da kein Drehmoment auf das Rad wirkt, muß wegen der Erhaltung des Drehimpulses die Winkelgeschwindigkeit um einen Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ abnehmen.

Das folgende Beispiel ist auch von Interesse: betrachten wir zwei einander zugewandte, parallele Spiegel, durch feste Stäbe in einer Entfernung a voneinander festgehalten. Ein Lichtstrahl, der zwischen den Spiegeln hin und her reflektiert wird, kann als eine Uhr betrachtet werden, deren Periode $\Delta t = 2a/c$ ist. Wenn das System in Bewegung gebracht wird, dann ändert sich die Periode dieser Uhr. Die Periode der bewegten Uhr wird dann nämlich gegeben durch

$$\Delta t' = \frac{a\sqrt{1-v^2/c^2}}{v+c} + \frac{a\sqrt{1-v^2/c^2}}{v-c} = \frac{2a/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

wo $a\sqrt{1-v^2/c^2}$ die Entfernung des Spiegels ist, nachdem die zusammenhaltenden Stäbe die Lorentz-Kontraktion erlitten haben. Wir sehen also, daß auch die Uhr sich verlangsamt hat.

Soweit wir sehen können, lassen sich die Transformationseigenschaften anderer physikalischer Größen von denen der bereits besprochenen ableiten. Wir glauben daher, daß die Lorentz-Deformationen, in einem allgemeinen Sinne gebraucht, alle auf Retardation zurückgeführt werden können.

Der Autor ist den Professoren L. Infeld und A. Rubinovicz und deren jüngeren Kollegen in Warschau sehr verbunden für eine detaillierte und interessante Diskussion der hier aufgeworbenen Probleme und Fragen.

Budapest, Zentral-Forschungsinstitut für Physik, Abteilung für kosmische Strahlenforschung.

(Bei der Redaktion eingegangen am 6. August 1952.)

Die physikalische Problematik des Teilchen-Wellen-Problems der Quantenmechanik¹⁾

Von L. Jánosy

(Mit 5 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die grundlegenden Begriffe der Quantentheorie werden analysiert. Es wird dabei untersucht, wie weit die Ergebnisse der orthodoxen Quantentheorie mit Notwendigkeit aus dem experimentellen Material folgen. Als Ergebnis dieser Analyse wird geschlossen, daß auf gewisse spekulative Resultate der Quantentheorie verzichtet werden kann und daß nach Weglassen dieser Resultate, wenigstens im Prinzip, es nicht unmöglich erscheint, für die Quantenerscheinungen ein Modell zu finden, welches einem klassischen Modell viel näher steht, als es im allgemeinen für möglich gehalten wird. Ein solches Modell würde gewisse unannehmbare, idealistische Folgerungen der Theorie unnötig machen, ohne dabei mit solchen Teilen der Theorie im Widerspruch zu geraten, die durch Experiment direkt bestätigt werden können.

Das von uns proponierte Modell ist nur qualitativ, es operiert aber explizit mit Wirkungen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Es wird gezeigt, daß die Analyse der experimentellen Resultate notwendigerweise zur Annahme von Wirkungen führen, die mit Überlichtgeschwindigkeit fortgepflanzt werden.

I. Einleitung

§ 1. Die orthodoxe Quantentheorie, d. h. die Theorie, wie sie von Bohr, Heisenberg und ihrer Schule formuliert wurde, kommt zu Folgerungen über Kausalität, Einfluß des Beobachters auf die Beobachtungsobjekte usw., die viele Physiker für unannehmbar halten von einem allgemeinen Standpunkt. Trotzdem hat man sich weitgehend mit diesen paradoxen Formulierungen abgefunden wegen der großen Erfolge der Quantentheorie. Diese „paradoxen“ Schlüsse sind im wesentlichen idealistische und positivistische Anschauungen. Eine physikalische Theorie kann aber nur auf die Vorstellung aufgebaut werden, daß die Außenwelt von uns unabhängig existiert, und ihre Gesetze unabhängig davon sind, was wir über sie denken. Der Konflikt zwischen den materialistischen und idealistischen Auffassungen hat nach unserer Meinung nicht nur zu verzerrten Anschauungen geführt, sondern hat tatsächlich die Entfaltung der Theorie gehindert. In diesem Artikel versuchen wir, uns mit diesen Problemen auseinanderzusetzen, aber nicht vom Standpunkt des Philosophen, sondern vom Standpunkt des Physikers, der

¹⁾ Vgl. auch Artikel desselben Verfassers *Acta Physica Hungarica* 1, 423 (1952).

gewisse physikalische Probleme klären will, mit denen die Theorie in ihrem heutigen Stand nicht fertig wird.

Die Schule der Sowjet-Physiker²⁻⁴⁾ hat in einer klaren Weise gezeigt, daß die philosophisch unannehmbaren Schlußfolgerungen der orthodoxen Quantentheorie von dem physikalischen Teil der Theorie abgesondert werden können. Bohrs „Prinzip der Komplementarität“ erscheint auf diese Weise als eine Last, aus der keine tatsächlichen Resultate abgeleitet werden können, und zumindest macht dieses Prinzip es nur schwierig, ein klares Bild der Vorgänge zu erhalten.

Es gibt auch im Westen eminente Physiker, die die philosophischen Ideen der Bohr-Schule nicht kritiklos annehmen. Da ist zunächst Einstein⁵⁾, der mit der Theorie unzufrieden ist. Bohm⁷⁾ kritisiert die Grundlagen der Quantentheorie. Planck⁸⁾ unterzog in einem Vortrag, den er 1937 hielt, das positivistische Vorgehen der Quantentheorie einer scharfen Kritik. Er machte weiterhin einen Versuch, die Quantentheorie so zu modifizieren, daß die durch positivistische Anschauungen hervorgerufenen Schwierigkeiten der Theorie eliminiert werden. Obwohl dieser Versuch Plancks nicht vielversprechend aussieht, sind seine Beweggründe klar und eindeutig niedergelegt. Mehrere andere Physiker äußern ähnliche Bedenken gegenüber den üblichen Anschauungen der Quantentheorie.

Wie schon erwähnt, wollen wir uns in dem gegenwärtigen Artikel nicht auf die philosophische Kritik der Quantentheorie beschränken, sondern wir wollen vielmehr die experimentellen Resultate, auf die die gegenwärtige Quantentheorie aufgebaut ist, einer eingehenden Analyse unterziehen. Insbesondere wollen wir untersuchen, welche der Folgerungen, die die orthodoxe Theorie aus den experimentellen Resultaten zieht, tatsächlich aus den experimentellen Resultaten mit Notwendigkeit gefolgert werden müssen. Als Resultat unserer Analyse kommen wir zu der Schlußfolgerung, in Übereinstimmung mit anderen kritischen Auffassungen der gegenwärtigen Theorie, daß es nicht nötig ist, die experimentellen Resultate in der üblichen idealistischen und positivistischen Weise zu interpretieren. Ich selbst bin zu der Auffassung gekommen, daß der Grund der Schwierigkeiten darin zu suchen ist, daß die gegenwärtige Quantentheorie eine unvollständige Theorie ist, und daß die idealistischen und positivistischen Schlußfolgerungen im wesentlichen Versuche sind, diese Unvollständigkeit der Theorie zu verbergen.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, möchte ich bemerken, daß ich die Theorie nicht als unvollständig im Sinne Einsteins ansehe. Ich bin nicht der Meinung, daß es möglich ist, einem Elementarteilchen gleichzeitig exakte Koordinaten und einen exakten Impulswert zuzuschreiben. In dieser Frage bin ich im wesentlichen einer Meinung mit Blochinzew³⁾, sowohl was Blochinzews Kritik der Einsteinschen Auffassung anbelangt, als auch in seiner Kritik von Bohrs Antwort an Einstein. Die Unvollständigkeit der Theorie liegt meiner Meinung nach viel tiefer und sie wird in § 19 dieses Artikels besprochen werden.

Neumanns sogenannter Beweis, daß die Quantentheorie nicht vervollständigt werden kann durch die Einführung sogenannter versteckter Parameter, steht

²⁾ Д. Н. Блохинцев, Основы Квантовой Механики, Москва 1949, § 129.

³⁾ Д. Н. Блохинцев, Доклады Академии Наук 82, 553 (1952.) Siehe dort auch Literaturnachweis von früheren Arbeiten desselben Autors.

⁴⁾ Я. И. Френкель, Успехи Физических Наук 41, 110 (1951).

⁵⁾ В. А. Фок, Успехи Физических Наук 45, 4 (1951). (Sowjetwissenschaft).

⁶⁾ A. Einstein, B. Podolsky u. N. Rosen, Physic. Rev. 47, 777 (1935).

⁷⁾ D. Bohm, Physic. Rev. 85, 166 (1952).

⁸⁾ M. Planck, Ann. Physik 37, 261 (1940); 40, 481 (1941).

nicht im Widerspruch zu unseren Überlegungen. Neumann beweist nämlich nur, daß die Quantentheorie nicht in eine deterministische Form gebracht werden kann, vorausgesetzt, daß wir alle ihre Resultate, die experimentell bewiesenen und die spekulativen, in gleicher Weise als richtig annehmen. Dagegen scheint mir keine wirkliche Notwendigkeit vorhanden zu sein, alle Voraussagen der Quantentheorie als gesichert anzusehen. In unseren Analysen werden wir uns auf solche experimentelle Tatsachen beschränken, die einigermaßen durch experimentelle Resultate als bestätigt angesehen werden können. Wir werden uns dabei nur mit den Resultaten wirklicher oder vernünftig idealisierter Experimente beschäftigen. Aus der Analyse dieser Experimente werden wir den Schluß ziehen, daß diese Experimente durch ein beinahe klassisches Modell beschrieben werden können.

Dieses klassische Modell führt natürlich nicht immer zu solchen Resultaten, die mit den Voraussagen der gegenwärtigen Quantentheorie übereinstimmen. Wir werden Fälle finden, in denen das qualitative Modell zu Resultaten führt, die in Widerspruch stehen mit dem, was nach der Quantentheorie zu erwarten wäre, aber diese Widersprüche ergeben sich nur auf solchen Gebieten, wo die Theorie im wesentlichen nur durch ideale Experimente gestützt wird, aber keine wirklichen Experimente ausgeführt werden konnten, d. h. unser Modell steht nicht in Widerspruch zu wirklichen Experimenten; aber aus dem Modell kann gefolgert werden, daß einige der idealen Experimente, sollte es gelingen, diese zu realisieren, zu vom Standpunkte der Quantentheorie unerwarteten Resultaten führen würden.

Die Widersprüche zwischen dem von uns proponierten Modell und der orthodoxen Quantentheorie ergeben sich meist auf dem Gebiete der makroskopischen Erscheinungen, während sich im wesentlichen an der Beschreibung der mikroskopischen Erscheinungen wenig ändert.

Viele der Ideen, die in diesem Artikel vorgebracht werden, wurden schon früher von anderen Autoren vorgeschlagen und diskutiert. Ich denke insbesondere an die frühen Veröffentlichungen von De Broglie und an die besonders interessanten Artikel von Blochinzew. Was neu an meinem Artikel scheinen mag, ist, daß ich viele dieser Ideen gleichzeitig einzuführen und sie mosaikartig zusammenzustellen versuche, um auf diese Weise ein geschlossenes Bild zu erhalten.

Die große Schwäche meiner Überlegungen ist die, daß ich im Augenblick nicht imstande bin, mein Modell mehr als in einer qualitativen Weise zu beschreiben. Meine Hoffnung ist jedoch, daß es mir mit diesem Artikel gelingen möchte, so viel Aufmerksamkeit auf diese Probleme zu lenken, daß andere Forschungen in dieser Richtung begonnen werden, und daß es als Resultat solcher Forschungen vielleicht möglich sein wird, der Lösung der Probleme näherzukommen. Im Augenblick will ich hauptsächlich zeigen, daß es im Gegensatz zu der verbreiteten Anschauung möglich ist, für die Quantenprozesse, wenigstens im Prinzip, ein Modell aufzustellen.

II. Wellen- und Korpuskulareigenschaften und Experimente

§ 2. Analyse der Experimente. Es gibt viele Experimente, die individuell entweder die Welleneigenschaften oder die Korpuskulareigenschaften der Elektronen oder Photonen oder anderer Elementarteilchen demonstrieren. Schwierigkeiten ergeben sich jedoch, sobald wir versuchen, solche Versuchsergebnisse gleichzeitig zu interpretieren. Die Anschauung wird vertreten, daß es „nicht erlaubt sei“, die Resultate solcher Experimente gleichzeitig zu betrachten: — es wird behauptet, daß das Mischen der zwei Charaktere zu unvernünftigen Resultaten führen müsse.

Unserer Meinung nach ist es zwar wahr, daß sich Paradoxien ergeben, wenn wir Wellen- und Korpuskularcharakter auf einmal in Betracht ziehen, aber diese Paradoxien können nicht dadurch eliminiert werden, daß wir postulieren, daß man über sie nicht nachdenken darf.

Wir beschreiben nun einige wichtige Experimente in einer qualitativen Weise und analysieren diese von dem eben auseinandergesetzten Standpunkt.

§ 3. Welleneigenschaften. Betrachten wir einen Schirm *I*, auf dem sich zwei Schlitze *A* und *B* befinden mögen. Gegenüber dem Schirm *I* sei ein Schirm *II* aufgestellt (s. Abb. 1). Eine ebene Welle falle auf den Schirm *I*. Wenn der Schlitz *A* geschlossen, der Schlitz *B* dagegen offen ist, dann wird der *B* gegenüberliegende Teil des Schirms *II* gleichförmig beleuchtet. Wenn dagegen beide Schlitze *A* und *B*

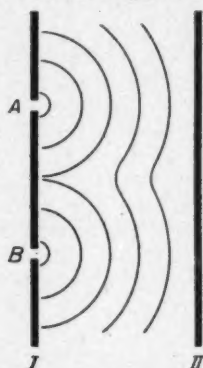


Abb. 1. Zweispalt-Interferenzsystem

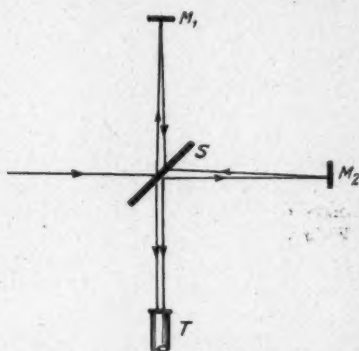


Abb. 2. Michelsonsches Interferometer

offen sind, dann erhalten wir auf *II* ein Interferenzsystem, das nicht der Summe der Lichtverteilungen entspricht, die wir erhalten würden, wenn *A* oder *B* einzeln den Schirm beleuchten würden.

Die obige Erscheinung kann genau interpretiert werden, wenn wir voraussetzen, daß die ebene Welle, die auf *A* und *B* fällt, Zylinderwellen mit einer auf *A* und *B* liegenden Achse erzeugt, und daß diese Zylinderwellen zur Interferenz kommen. Eine der Zylinderwellen allein würde auf *II* eine gleichförmige Intensitätsverteilung ergeben. Das Zusammenwirken beider Wellen dagegen ergibt das Interferenzsystem.

Diese Experimente, mit Lichtwellen ausgeführt, beweisen die Wellennatur des Lichtes. Ein entsprechendes Experiment mit dem Elektronenstrahl zeigt in ähnlicher Weise die Wellennatur der Elektronen.

Es sind sehr viele andere Interferenzversuche ausgeführt worden; die Ergebnisse dieser Versuche beweisen mit großer Genauigkeit, daß das Licht ein Wellenphänomen ist und aus elektromagnetischen Wellen besteht, die den Maxwell'schen Gleichungen genügen. Insbesondere gibt es interessante Experimente, die zeigen, daß Atome sphärische Wellen emittieren, deren Polarisation genau jener der theoretisch vorhergesagten Dipolstrahlung entspricht. Solche Experimente wurden von Selényi 1911⁹⁾ und unabhängig von Schrödinger¹⁰⁾ ausgeführt.

⁹⁾ P. Selényi, Ann. Physik **35**, 444 (1911).

¹⁰⁾ E. Schrödinger, Ann. Physik **61**, 69 (1920).

Diese letzteren Versuche zeigen, daß auch Teile einer sphärischen Welle, die sich ursprünglich in verschiedenen Richtungen bewegten, zur Interferenz gebracht werden können. Interferenzstreifen haben eine genau solche Verteilung und Polarisation wie theoretisch zu erwarten ist für polarisierte Kugelwellen¹¹⁾.

Eine besondere Art der Interferenzversuche ist die Reflexion eines Lichtstrahls an der Oberfläche eines durchsichtigen festen Körpers oder eines Spiegels. In einem solchen Versuch kann ein Lichtstrahl in zwei Komponenten geteilt werden; diese Komponenten eines Lichtstrahls sind aber kohärent, denn wenn die Komponenten wieder vereinigt werden, erzeugen sie Interferenzstreifen. Ein typischer Versuch dieser Art ist der Michelsonsche Interferenzversuch.

§ 4. Korpuskulareigenschaften. Die korpuskulare Natur des Lichtes kann durch den Einsteinschen photoelektrischen Effekt demonstriert werden. Es kann also gezeigt werden, daß ein Lichtstrahl aus einzelnen Photonen besteht, wobei die Energie jedes einzelnen Photons $h\nu$ ist. Da die Photonen eines Strahls voneinander unabhängig sind, zeigt ein schwacher Lichtstrahl Intensitätsschwankungen. Solche Schwankungen wurden sehr detailliert von Wawilow¹²⁾ studiert.

Daß ein Lichtstrahl aus Photonen zusammengesetzt ist, kann auch mit Hilfe des Elektronen-Vervielfältigers gezeigt werden. Das letztere Instrument spricht auf die einzelnen Photonen an. Wenn ein einzelnes Photon auf die Kathode des Vervielfachers fällt, so wird es eine Elektronenlawine auslösen, sofern es aus der Kathode ein einziges Photoelektron heraus schlägt. Die Elektronenlawinen erzeugen ein Signal, das, entsprechend verstärkt, ein mechanisches Zählwerk betätigen kann. Wir können auf diese Weise mit Hilfe von Elektronen-Vervielfachern einzelne Photonen eines Strahles direkt zählen¹³⁾.

Wir können die Intensität eines Lichtstrahls als die Zahl der Photonen pro cm^2 und sec definieren und diese Intensität mit Hilfe von Elektronen-Vervielfachern tatsächlich bestimmen. Wir können auf diese Weise die Intensitätsverteilung z. B. eines Interferenzbildes direkt mit Elektronen-Vervielfachern ausmessen. In einer ähnlichen Weise können wir auch die Verteilung der Intensität eines Lichtstrahls auf seine zwei Komponenten bestimmen, indem wir die Zahl der Photonen in den einzelnen Komponenten zählen.

Sofern wir große Intensitäten messen, und es mit monochromatischem Licht einer Frequenz ν zu tun haben, können wir sagen, daß die Photonendichte in einem beliebigen Teil der Lichtverteilung der aus den Maxwellschen Gleichungen berechneten Energiedichte proportional ist. Neue Probleme treten aber auf, wenn wir kleine Intensitäten untersuchen, die nur wenigen Photonen entsprechen.

§ 5. Die Eigenschaften einzelner Photonen. Betrachten wir nun eine schwache Lichtquelle, die N Photonen pro Sekunde in einen parallelen Strahl emittiert. Wenn wir nun einen Verschuß vor die Lichtquelle bringen, der sich für eine Zeit $\tau \ll 1/N$ öffnet, dann wird in den meisten Fällen beim Öffnen des Verschlusses überhaupt kein Photon durch den Verschuß gehen. Wenn wir jedoch diejenigen Fälle betrachten, in denen Photonen doch durch den Verschuß gehen,

¹¹⁾ P. Selényi, Z. Physik 108, 401 (1938).

¹²⁾ С. И. Вавилов, Микроструктура Света, Москва 1950.

¹³⁾ Die Empfindlichkeit eines Elektronen-Vervielfachers ist kleiner als 1 und ist von der Größenordnung $1/20-1/200$, d. h. Photonen lösen den Vervielfacher nur mit einer Wahrscheinlichkeit von einigen Prozenten aus. Deswegen zählt ein Elektronen-Vervielfacher nicht jedes Photon eines Lichtstrahls. Wir müssen daher eine gewisse Vorsicht gebrauchen, wenn wir die mit Elektronen-Vervielfachern erhaltenen Ergebnisse auswerten.

müssen wir erwarten, daß diese Photonen meist einzeln durch den Verschuß gehen werden und nur in Ausnahmefällen werden Gruppen von mehreren Photonen durch den Verschuß gehen. Eine solche Lichtquelle mit Verschuß kann praktisch gebaut werden, und diese Anordnung kann als eine Quelle für einzelne Photonen benutzt werden.

Wir überlegen uns nun, was geschieht, wenn wir einzelne Photonen eines nach dem anderen auf eine optische Anordnung einfallen lassen. Der einfachste Fall ist der eines Strahls a , der unter dem Winkel von 45° auf den halbversilberten Spiegel M fällt. (Siehe Abb. 3.) Der Strahl a wird in einen reflektierten und einen durchgehenden Strahl gespalten, also in zwei Komponenten, die wir mit α und β bezeichnen wollen. Was geschieht nun mit den einzelnen Photonen? Wie Cosyns¹⁴⁾ experimentell gezeigt hat, erscheint jedes einzelne Photon entweder im reflek-

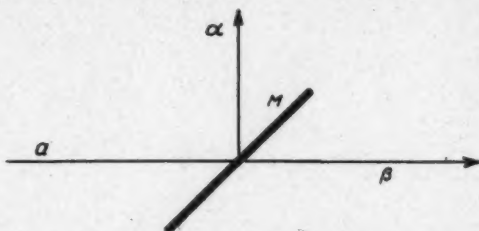


Abb. 3. Spaltung eines Strahls a in kohärente Komponenten α und β

tierten oder im durchgehenden Strahl, sofern wir uns von dem Ergebnis des folgenden Experimentes führen lassen wollen.

Die Strahlen α und β werden von je einem Elektron-Vervielfacher aufgenommen. Wenn nun ein Photon in zwei Teile brechen würde, dann würde es eine Koinzidenz zwischen den Vervielfachern hervorrufen. Das Experiment

hat nun gezeigt, daß zwei solche Vervielfacher keine Koinzidenzen zeigen, abgesehen von solchen Koinzidenzen, die zurückzuführen sind auf die zufällige Häufung mehrerer Photonen in ein kurzes Zeitintervall. Das heißt, jedes Photon fällt ausschließlich auf einen der Vervielfacher.

Ein ähnliches Verhalten müssen wir erwarten von einzelnen Photonen, die auf ein Beugungsgitter fallen. Jedes der Photonen wird durch das Gitter gehen und dann auf den Schirm fallen, auf dem das Interferenzsystem erscheint. Wenn wir nun den Schirm durch eine große Zahl von Vervielfachern ersetzen würden, so daß die Kathoden der Elektronen-Vervielfacher das Gebiet des Schirmes völlig bedecken, dann müssen wir erwarten, daß jedes Photon (höchstens) einen der Vervielfacher zum Ansprechen bringt. Das heißt, daß jedes Photon genau auf einen Punkt des Schirmes fällt.

Wenn wir nun dieses Experiment oft wiederholen, d. h. wenn wir ein Photon nach dem anderen auf das Gitter fallen lassen, und wenn wir in jedem Fall den Ort bezeichnen, an dem das Photon auf den Schirm auffällt, dann erwarten wir, daß diese Punkte nach und nach sich gruppieren und allmählich das bekannte Interferenzbild ergeben. Wir erwarten also, daß, abgesehen von statistischen Schwankungen, die Anzahl der Photonen, die auf die einzelnen Vervielfacher fallen, proportional der Intensität, die auf die Kathode des Vervielfachers fällt, ist.

¹⁴⁾ Nach einer persönlichen Mitteilung hat Max Cosyns ein derartiges Experiment vor mehreren Jahren ausgeführt, aber das Resultat nicht publiziert. Ein ähnliches Experiment wird von A. Adam in meinem Laboratorium vorbereitet.

Das Bemerkenswerteste an diesem Experiment ist, daß die hier benutzten Photonen voneinander völlig unabhängig sind. Man kann nämlich die Zeitintervalle zwischen dem Einfall der einzelnen Photonen beliebig lang wählen und auf diese Weise von vornherein jede Wechselwirkung zwischen den einzelnen Photonen ausschließen. Ferner, anstatt 1000 Photonen durch eine Anordnung zu schicken, kann man ebensogut je ein Photon auf 1000 gleichartig gebaute Anordnungen auffallen lassen, und niemand wird daran zweifeln, daß die aus den 1000 gleichen Anordnungen gewonnenen Ergebnisse zusammen zum selben Ergebnis führen, wie das aus der einen Anordnung und 1000 Photonen allein gewonnene.

Es ist zwar wahr, daß das eben besprochene Experiment in dieser Form niemals ausgeführt worden ist, aber wir haben keinen Zweifel, daß ein solches Experiment tatsächlich zu dem hier geschilderten Ergebnis führen würde. Wir sind aus zwei Gründen unserer Sache so sicher. 1. Wavilows Experimente¹²⁾ haben gezeigt, daß die Intensitätsschwankungen, die auf die Photonenstruktur des Lichtes zurückgeführt werden müssen, in verschiedenen Teilen eines Interferenzsystems unabhängig voneinander vorsichgehen. 2. Das Interferenzbild, das durch ein Beugungsgitter hervorgerufen wird, ist in sehr weiten Grenzen unabhängig von der verwendeten Lichtintensität.

Zu 1. bemerken wir, daß die unabhängigen Schwankungen darauf hinweisen, daß in den verschiedenen kohärenten Teilen des Interferenzbildes voneinander unabhängige Photonen eintreffen. Zu 2., daß falls das Interferenzbild durch die Wechselwirkung einzelner Photonen zustande kommen würde, diese Wechselwirkung mit der Lichtintensität abnehmen müßte, d. h. das Interferenzbild müßte von der absoluten Photonendichte abhängen. Es wird keine Andeutung eines solchen Effektes gefunden.

Wir müssen also annehmen, daß ein Interferenzbild, das von einem Gitter erzeugt wird, zustande kommt durch die unabhängige Wirkung von einzelnen Photonen, daher muß angenommen werden, daß jedes Photon, obwohl es in einem einzigen Punkt absorbiert wird, als Tendenz das ganze Interferenzbild enthält. Jedes Photon interferiert mit sich selbst, wird aber schließlich in einem Punkt absorbiert, mit Vorzug in einem solchen Gebiet, wo das Interferenzbild große Intensität zeigt.

III. Synthese von Wellen- und Korpuskulareigenschaften

§ 5. Das folgende Bild scheint uns zufriedenstellend sowohl die Wellen- wie Korpuskulareigenschaften des Lichtes gleichzeitig zu interpretieren. Das Licht wird in Quanten emittiert. Das Quantum nimmt nach seiner Emission die Form eines elektromagnetischen Feldes an und breitet sich den Maxwell'schen Gleichungen gemäß aus. Das Feld bleibt so lange bestehen, bis das Quantum absorbiert wird. In dem Prozeß der Absorption erscheint das Quantum als Photon. Die Absorption selbst muß als eine besonders starke Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einem Atom oder Elektron betrachtet werden (die Stärke der Wechselwirkung mag mit einer Art von Resonanz in Zusammenhang gebracht werden). Diese starke Wechselwirkung hat zur Folge, daß das ganze Wellenfeld zusammengezogen wird und von dem absorbierenden Zentrum aufgesaugt wird. Es muß vorausgesetzt werden, daß ein Wechselwirkungszentrum um so eher ein Photon aufsaugen kann, je größer die Feldintensität in der unmittelbaren Umgebung des Zentrums im Augenblick der Absorption ist.

Um dieses Bild zu vervollständigen, müssen wir auch den Fall in Betracht ziehen, daß ein Photon mit mehr als einem Zentrum gleichzeitig in starke Wechselwirkung tritt und zwar in so einer Weise, daß jedes der Zentren für sich das Photon absorbieren würde, wäre nicht die Wechselwirkung mit den anderen Zentren vorhanden. In diesem Falle müssen wir annehmen, daß ein komplizierter Prozeß einsetzt, in dem die einzelnen Zentren sich in einer Art Wettstreit befinden, bis es am Ende einem der Zentren gelingt, die anderen Zentren zu überwiegen und das ganze Photon zu absorbieren.

Das obige Modell erklärt wenigstens qualitativ sowohl Interferenz- als auch Korpuskulareigenschaften des Photons. Ich bin der Ansicht, daß dieses Modell die einzige naheliegende und natürliche Weise der Interpretation der experimentellen Resultate liefert. Das Modell wurde jedoch bis jetzt nie ernstlich in Betracht gezogen, wahrscheinlich wegen zweier Schwierigkeiten, die es enthält. Wir diskutieren diese Schwierigkeiten im folgenden.

1. Die Zusammenziehung eines Wellenfeldes benötigt eine Wirkung, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Wenn nämlich eine Kugelwelle, die von einem Punkt O ausgeht, in einem Punkt A absorbiert wird, dann muß die Wechselwirkung, die zur Zusammenziehung der Welle in A führt, von A aus sich auf die ganze Welle ausbreiten; und um den Teil der Welle, der sich von A aus in diametral entgegengesetzter Richtung fortbewegt, einzuholen, muß diese Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit sich über das Wellenfeld ausbreiten.

Nach unserer Anschauung ist dies keine wirkliche Schwierigkeit. Unsere Anschauung über Überlichtgeschwindigkeit wurde in dem vorigen Artikel dargelegt. Ich würde sogar zu behaupten wagen, daß der photoelektrische Effekt zusammen mit den Experimenten über Großwinkel-Interferenz die Annahme von Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeiten notwendig machen. Der unvoreingenommene Experimentator würde jedenfalls aus diesen zwei Experimenten auf die Existenz von Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeiten schließen.

2. Der zweite Einwand gegen unser Modell der sich zusammenziehenden Wellen ist philosophischer Natur; er ist aber unserer Ansicht nach nicht stichhaltig.

Es wird nämlich behauptet, daß wir Strahlung entweder als aus Wellen bestehend oder aus Teilchen bestehend zu betrachten haben; wir dürfen angeblich die zwei Bilder nicht mischen. Das Argument, das gebracht wird gegen die Verwendung eines gemischten Bildes, hängt mit der Heisenbergschen Unsicherheitsrelation zusammen. Es wird darauf hingewiesen, daß wir keine direkten experimentellen Resultate betreffs der Intensitätsverteilung innerhalb einer Welle oder sogar über die räumliche Ausdehnung einer Welle erhalten können, falls wir von derselben Welle zeigen wollen, daß sie zu Interferenz fähig ist.

Nehmen wir als Beispiel das Experiment von Sélénýi. Betrachten wir eine Punktquelle, die Photonen eines nach dem anderen emittiert. Die Photonen sollen in genügend großen Abständen emittiert werden, so daß wir die Möglichkeit der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Photonen ausschließen können. Wenn wir nun die Lichtquelle mit Elektronen-Vervielfachern umgeben, deren Kathoden eine Kugelfläche um die Quelle der Photonen bedecken, so kann man mit Hilfe dieser Vervielfacher statistisch die Intensitätsverteilung der Strahlung bestimmen. Wenn die Lichtquelle zur z -Achse parallel polarisiertes Licht aussendet, dann finden wir statistisch, daß die Zahl der Photonen innerhalb eines Raumwinkel-elements $d\Omega$ proportional $\sin^2 \vartheta$ sein wird, falls der Strahl in einer Richtung liegt, die um den Winkel ϑ zur z -Achse geneigt ist.

Dieses Experiment erlaubt uns also, die Statistik der Photonenrichtungen zu bestimmen, wir können aber nicht feststellen, ob irgendeines der Photonen, deren Richtung wir so bestimmt haben, auch eine räumliche Ausdehnung hat, und wir können daher nicht bestimmen, ob auch nur eines dieser Photonen vermöge seiner räumlichen Ausdehnung zur Interferenz mit sich selbst gebracht werden könnte. Wir vernichten nämlich das Photon, wenn wir es zählen, deswegen können die Photonen, die einmal mit Hilfe des Vervielfachers lokalisiert wurden, nicht mehr zu einem Interferenzbild beitragen. Wenn wir dagegen die Vervielfacher entfernen, dann können wir mit Hilfe von Reflexionen, wie Selényi es tatsächlich tat, verschiedene Teile ein und derselben sphärischen Welle zur Interferenz bringen und in einer bestimmten Entfernung ein Interferenzbild erhalten.

Wir können daher mit Experimenten an einer Gruppe von Photonen feststellen, daß die Strahlung in alle Richtungen emittiert wird; wir können aber nicht feststellen, ob die individuellen Photonen dieser Gruppe interferenzfähig gewesen wären, wären sie nicht absorbiert worden. Mit einer anderen Gruppe von Photonen können wir die Interferenzfähigkeit der Photonen feststellen, aber von ihnen können wir wiederum nicht feststellen, in welchen Richtungen sie gefunden worden wären, wenn die Vervielfacher zur Stelle gewesen wären.

Die positivistische Schlußfolgerung aus all dem ist, daß es, da wir nicht imstande sind, an denselben Photonen sowohl die sphärische Verteilung, wie die Interferenzfähigkeit nachzuweisen, „sinnlos“ sei, zu behaupten, daß jedes Photon beide Eigenschaften gleichzeitig besitze. Diese positivistische Anschauung ist aber unberechtigt. Wir können uns ruhig auf die Messungen mit verschiedenen Photonengruppen verlassen und können schließen, daß die zwei Eigenschaften, die in zwei Gruppen von Experimenten festgestellt worden sind, tatsächlich Eigenschaften aller individuellen Photonen sind.

§ 7. Um die Berechtigung dieser Behauptung ganz klar zu stellen, nehmen wir an, daß wir eine Anordnung haben, die leicht so umgestellt werden kann, daß wir die Möglichkeit haben, entweder eine Lichtquelle mit Elektronen-Vervielfachern oder mit einer Großwinkel-Interferenzapparatur zu umgeben. Wir können nun jedes zweite Photon mit der einen Anordnung, die dazwischen ausgesandten Photonen mit der anderen Anordnung beobachten. Wir können z. B. das erste, dritte, fünfte usw. Photon benützen, um die Richtungsverteilungen der Photonen festzustellen. Dagegen das 2., 4., 6., usw. Photon können wir zur Herstellung eines Interferenzbildes benützen. Es ist nun ohne weiteres klar, daß wir ebensogut die Photonen Nr. 2, 4, 6 usw. für das erste Experiment und die Photonen Nr. 1, 3, 5 usw. für das zweite Experiment hätten benützen können, ohne daß sich das Ergebnis des Versuches geändert hätte. Ferner ist es klar, daß wir, nachdem wir eine große Zahl von Experimenten beider Art durchgeführt haben, die aus diesen beiden experimentellen Reihen gefundenen Eigenschaften jedem der benutzten Photonen zuschreiben können, und daß wir außerdem schließen können, daß diese Eigenschaften jedem Photon, wenn es nur in derselben Weise emittiert worden ist, zuzuschreiben sind.

Diese Schlußweise beruht auf einer Verallgemeinerung, die man Schritt für Schritt zu machen hat, wenn man eine Theorie auf experimentelle Ergebnisse aufbaut. Der Umstand, daß es unmöglich gewesen wäre, beide Arten von Experimenten mit demselben Photon durchzuführen, wird gewöhnlich von der Bohrschen Schule sehr hervorgehoben. Jedoch glauben wir, daß dieser Umstand gar nicht wichtig ist. Wir wollen dies an folgendem Beispiel demonstrieren.

Betrachten wir hundert geladene Bomben. Wir untersuchen eine nach der anderen. Die erste untersuchen wir, indem wir sie aufmachen, den Sprengstoff herausnehmen und den Sprengstoff chemisch analysieren. Die zweite Bombe öffnen wir nicht, sondern lassen sie explodieren. Die dritte öffnen wir, die vierte lassen wir wieder explodieren usw. Es wäre nun lächerlich zu behaupten, nachdem wir auf diese Weise alle Bomben untersucht haben, daß fünfzig der Bomben Sprengstoff einer bestimmten chemischen Zusammensetzung, die durch Analyse festgestellt wurde, enthalten, aber daß wir nicht wissen können, ob diese fünfzig hätten explodieren können; von den anderen fünfzig wissen wir zwar, daß sie explodiert sind, aber wir können nicht wissen, ob auch sie den bei den anderen festgestellten Sprengstoff tatsächlich enthielten. Falls wir eine Terminologie benützen wollten, welche an die der Unsicherheits-Relation erinnert, müßten wir sagen, daß jede der Bomben entweder Sprengstoff enthält, oder explodieren kann! Tatsächlich existiert eine „Unsicherheits-Relation“, die darin besteht, daß, indem wir durch chemische Analyse den Inhalt einer Bombe bestimmten, wir verhindern, daß diese Bombe explodieren kann, oder wenn wir eine Bombe explodieren lassen, machen wir die chemische Analyse unmöglich. So weit ist alles in Ordnung — wir dürfen aber nicht annehmen, daß wir den Sprengstoff durch die chemische Analyse schaffen. Wir sind vollkommen zufrieden damit, daß, wenn wir eine gewisse chemische Verbindung in vielen Bomben finden, wir dieselbe Substanz in den übrigen Bomben gefunden hätten, auch dann, wenn wir uns nicht die Mühe genommen haben, dies durch Analyse festzustellen. Das heißt durch Induktion verallgemeinern wir das Resultat unserer Ergebnisse, die auf eine genügend große Probe aufgebaut waren. Wir nehmen an, daß dieses Resultat auch auf jene Fälle extrapoliert werden kann, die in den Proben nicht enthalten waren. Das heißt, wenn wir den Inhalt einer Probe durch chemische Analyse feststellen, wenn wir ferner die Stücke eines anderen Musters explodieren lassen, können wir schließen, daß die übrigen Stücke (die wir überhaupt nicht untersucht haben) sowohl Sprengstoff enthalten wie auch explodieren können.

Um zum Photonbeispiel zurückzukehren, können wir ruhig annehmen, daß jedes Photon seine Reise als ausgedehnte Welle beginnt, nach unserer Erfahrung über die photoelektrische Absorption können wir aber auch annehmen, daß die gesamte ausgebreitete Welle lokal absorbiert wird durch ein kleines Hindernis, auf das ein kleiner Teil der Welle auffällt.

§ 8. Wir kehren nun zurück zur Besprechung des ersten Einwandes gegen unser Modell der sich zusammenziehenden Welle. Wenn wir die positivistischen Einwendungen außer acht lassen, dann werden wir von den experimentellen Resultaten, die in § 5 beschrieben wurden, direkt zu dem Bild der sich zusammenziehenden Welle geführt, d. h. die unvoreingenommene Analyse der experimentellen Tatsachen führt direkt zur Annahme einer Wirkung, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet. Es kann nun nicht argumentiert werden, daß diese Analyse verworfen werden müßte, da sie zu Resultaten führt, die der experimentell gesicherten Relativitätstheorie widersprechen. Die Relativitätstheorie in ihrer gewöhnlichen Formulierung behauptet ja nur, daß die Einsteinsche Interpretation der Lorentz-Transformation zu verwerfen wäre, falls man experimentell eine Wirkung, die mit Überlichtgeschwindigkeit fortgepflanzt wird, finden würde. Die experimentell bestätigten Resultate der Relativitätstheorie sind aber mathematisch auf der Lorentz-Transformation basiert, und diese Resultate sind weitgehend unabhängig davon, ob wir diese Transformation nach Einstein oder nach Lo-

rentz und Fitzgerald interpretieren. Die Konstriktions-Hypothese des Photons ist aber unverträglich mit der Einsteinschen Interpretation der Lorentz-Transformation, sie ist aber durchaus verträglich mit allen physikalischen Ergebnissen, die aus der Relativitätstheorie abgeleitet werden können. Der Widerspruch zwischen der Konstriktions-Hypothese und der Einsteinschen Auffassung kann in folgender Weise beleuchtet werden. Die Zusammenziehung des Photons muß als eine Störung der elektromagnetischen Welle angesehen werden, die vom absorbierenden Zentrum ausgeht und sich mit Überlichtgeschwindigkeit über das gesamte Gebiet der Welle ausbreitet. Die Wechselwirkung zwischen dem Zentrum und der Welle ist die Ursache der Zusammenziehung, die Zusammenziehung ist dagegen die Wirkung. Für einen sich sehr schnell bewegenden Beobachter, der im übrigen seine Uhren und Meßstäbe nach Vorschrift der Relativitätstheorie eingestellt hat, würde dieser Vorgang anders aussehen. Dieser Beobachter würde nämlich finden, daß die Störung irgendwo an der Peripherie der Welle begann und sich zum Zentrum hin ausbreitet. Für diesen Beobachter würde also Ursache und Wirkung in umgekehrter Reihenfolge erscheinen. Wir können aber nicht annehmen, daß Ursache und Wirkung tatsächlich in der Zeit vertauschbar sein können.

Wenn wir also daran festhalten, daß die Zusammenziehung der Welle durch das Störungszentrum verursacht ist, dann müssen wir den Standpunkt des sich schnell bewegenden Beobachters als unrichtig ausschließen. Das bedeutet, daß wir annehmen müssen, daß das Bezugssystem des sich schnell bewegenden Beobachters tatsächlich verzerrt ist in der Weise, wie es im vorigen Artikel beschrieben wurde.

IV. Interpretation der Schrödingerschen Wellenfunktion

§ 9. Die Betrachtungen über Photonen können auch auf die Probleme des Elektrons und anderer Elementarteilchen ausgedehnt werden. Es wird damit die Frage nach der präzisen Bedeutung der Wellenfunktion aufgeworfen. Drei Möglichkeiten müssen besprochen werden.

1. Schrödingers ursprüngliche Auffassung der ψ -Funktion war die, daß sie ein verschmiertes Elektron beschreibt. Es wurde also angenommen, daß $|\psi|^2 dV$ die Materie sei, die in einem Volumelement dV enthalten ist. Dieses sehr schöne Bild wurde von Schrödinger fallen gelassen, da es sich nicht ohne weiteres auf den Fall von mehr als einem Elektron verallgemeinern ließ.

2. Borns Interpretation. Hier wird angenommen, daß $|\psi|^2 dV$ die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß man das Elektron innerhalb des Volumenelements dV findet. Diese Annahme ist ein spezieller Fall der folgenden allgemeineren Annahme.

O sei ein Operator, der der Messung einer bestimmten physikalischen Größe entspricht. Die Eigenfunktionen dieses Operators seien ψ_1, ψ_2, \dots , die den Eigenfunktionen entsprechenden Eigenwerte seien dagegen O_1, O_2 usw. Der Zustand ψ eines Systems kann nun nach den Eigenfunktionen des Operators O in der folgenden Weise entwickelt werden

$$\psi = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + \dots \quad (1)$$

Die Bedeutung der A_k ist die, daß im Falle der Messung $|A_k|^2$ die Wahrscheinlichkeit angibt, daß das Resultat der Messung O_k wird.

Die folgende idealistische Überlegung wird im allgemeinen zu Borns Hypothese hinzugefügt: Wenn wir als das Resultat unserer Messung finden, daß die physikalische Größe O den Wert O_k besitzt, dann ändert sich durch diese Messung

der Zustand unseres Wissens über das System, und als Folge ändert sich auch die Wellenfunktion. Anfangs war die Wahrscheinlichkeit, daß O den Wert O_k hat, $|A_k|^2$. Nach der Messung wissen wir aber mit Sicherheit, daß O diesen Wert hat. Der Zustand, in dem das System mit Sicherheit den Wert O_k besitzt, wird durch die Wellenfunktion ψ_k ausgedrückt. Es wird also angenommen, daß die Messung einen plötzlichen Zustandswechsel hervorbringt und zwar

$$\psi \rightarrow \psi_k.$$

Dies ist die Essenz des so oft erwähnten „Einflusses des Beobachters auf das beobachtete System“. Wir kommen später auf diese Anschauung zurück und werden sie im Detail besprechen.

3. Die dritte Möglichkeit der Interpretation der Wellenfunktion ist die statistische Interpretation. Die Wahrscheinlichkeit wird hier in einer objektiven Weise benützt. Es wird angenommen, daß dieselbe Messung an vielen Atomen, die alle im Anfangszustand waren, ausgeführt, zu verschiedenen Meßergebnissen führen kann. Die Häufigkeit des Meßergebnisses O_k wird proportional $|A_k|^2$ sein, also von einer großen Anzahl N von Messungen werden ungefähr $|A_k|^2 N$ zu dem Ergebnis O_k führen.

§ 10. Die Analyse der drei Interpretationen. Der dritte Gesichtspunkt wird von vielen Physikern akzeptiert. Er ist sicherlich richtig, so weit er geht. Ich versuche aber zu zeigen, daß dieser Standpunkt nicht die Gesamtheit der Phänomene enthält, die uns zugänglich sind. Daß die Hypothese 3 zu eng ist, kann z. B. an der Analyse des Zweispaht-Interferenzversuches gezeigt werden. (S. § 3, Abb. 1.)

Betrachten wir Teilchen, die von links kommen und auf den Schirm mit den zwei Schlitzen auffallen. Wenn wir nun Zählrohre, welche die Schlitze vollkommen bedecken, hinter dieselben stellen, können wir mit Hilfe dieser Zählrohre von jedem Teilchen feststellen, ob es auf A oder auf B fällt. Selbstverständlich werden die meisten Teilchen auf keinen der Schlitze fallen, sondern werden vom Schirm absorbiert. Wir interessieren uns aber nur für jene Teilchen, welche auf einen der Schlitze fallen.

Wir lokalisieren die Teilchen, während sie versuchen, durch einen der Schlitze hindurchzugehen. Die Teilchen werden durch den Prozeß der Lokalisation absorbiert und werden daher niemals den Schirm II erreichen. Wenn wir dagegen die Zählrohre fortnehmen, dann werden die Teilchen, die auf Schlitze fallen, den Schirm II erreichen, und sie werden statistisch das Interferenzbild zustande bringen.

Da wir keine positivistischen Vorurteile haben, nehmen wir an, daß die Teilchen, die nicht durch Zählrohre lokalisiert worden sind, sondern frei durch die Schlitze hindurch gelassen werden, hätten lokalisiert werden können in der Nähe der Schlitze A oder B . Wenn wir auf diese richtige Bemerkung hin schließen wollten, daß jedes Teilchen nur durch einen Schlitz gegangen und nachträglich auf den Schirm II aufgefallen sei, dann geraten wir aber in Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeit wird klar, wenn wir die Intensität in der Nähe eines Interferenzminimums betrachten. Wenn wir nämlich die Teilchen, die durch A gehen, betrachten, finden wir, daß sie vermeiden, in die Nähe des Interferenzminimums zu fallen. Wenn wir nun den Schlitz B zudecken, dann werden die Teilchen, die durch A hindurchgehen, dieses Gebiet nicht mehr vermeiden. Es muß daher Teilchen geben, die durch den Schlitz A gehen und aus der Umgebung eines

Maximums in die eines Minimums umgelenkt werden, wenn der Schlitz *B* geschlossen wird. Wir können natürlich nicht bestimmen, welche Teilchen in dieser Weise beeinflusst werden, aber da die Intensität aus der Umgebung des Maximums auf das ganze Gebiet des Interferenzbildes aufgeteilt wird als Folge des Schließens von *B*, müssen wir annehmen, daß es sicherlich solche Teilchen gibt, die zwar durch *A* gegangen sind, aber davon beeinflusst werden, ob *B* offen oder geschlossen ist.

§ 11. Dieses merkwürdige Resultat könnte erklärt werden, wenn wir annehmen würden, daß die Teilchen, die durch *A* gehen, mit denen, die durch *B* gehen, in Wechselwirkung treten können. Die Möglichkeit einer Wechselwirkung kann aber ausgeschlossen werden, wir können nämlich die Teilchen sehr langsam hintereinander auf die Anordnung einfallen lassen, so daß das Schicksal jeden Teilchens schon als entschieden betrachtet werden kann, bevor das nächste Teilchen ankommt. Das Interferenzphänomen kann also nicht durch Wechselwirkung der einzelnen Elektronen erklärt werden.

Wenn wir also voraussetzen, daß die Teilchen voneinander unabhängig sind, dann müssen wir zugeben, daß das Interferenzexperiment eindeutig beweist, daß jedes Teilchen durch die Schlitze *A* und *B* hindurch gehen muß. Wenn nämlich gewisse Teilchen nur durch *A* gegangen wären und die übrigen nur durch *B*, dann müßten wir annehmen, daß die Teilchen unabhängig voneinander sind, daß auf dem Schirm eine Verteilung

$$f_{A+B} = f_A + f_B$$

sich ergeben würde, wo f_A die Verteilung der Teilchen ist, die nur durch *A* gehen, aber von *B* nicht beeinflusst werden, ferner f_B die Verteilung jener Teilchen ist, die nur durch *B* gegangen sind und von *A* nicht beeinflusst wurden. Tatsächlich finden wir, daß in der Nähe des Minimums

$$f_{A+B} < f_A + f_B,$$

während in der Nähe des Maximums

$$f_{A+B} > f_A + f_B.$$

Wir sehen also, daß beide Schlitze Einfluß haben auf die zwischen den zwei Schirmen sich bewegenden Teilchen.

Man kann sich zwei Möglichkeiten vorstellen, wie zwei Schlitze auf die einzelnen Teilchen einen Einfluß ausüben können.

Erstens: Man könnte annehmen, daß jedes Teilchen eine ganz komplizierte Bewegung ausführt, und daß es im Laufe seiner Bewegung beide Schlitze des öfteren durchkreist, bevor es endgültig auf den Schirm *II* auffällt. (S. Abb. 4.) Wenn wir für den Augenblick diese Hypothese annehmen, dann müssen wir schließen, daß ein Teilchen bei dem ersten Versuch, durch *A* oder *B* hindurchzugehen, absorbiert würde, falls wir Zählrohre hinter jene Schlitze aufstellten. Wenn wir dagegen die Schlitze offen lassen, dann würde jedes Teilchen in einer komplizierten Weise zirkulieren, die Bahn würde durch beide Schlitze beeinflusst werden, und die Bewegung würde enden, sobald das Teilchen auf einen der zwei Schirme auffallen und absorbiert würde.

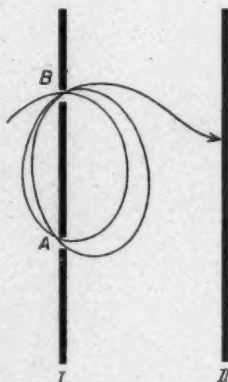


Abb. 4. Schema einer komplizierten Bahnbewegung durch zwei Spalte

Das obige Bild erscheint aber ganz phantastisch. Eine seiner großen Schwierigkeiten ist die, daß der Schirm *I* das Teilchen beim ersten Auftreffen absorbieren müßte. Nun ist es sehr schwierig, sich vorzustellen, wie es möglich sein kann, daß ein Teilchen oft hintereinander durch die engen Schlitzte *A* und *B* hindurchgeht, ohne inzwischen von der großen, absorbierenden Fläche des Schirmes *I* verschluckt zu werden. Das obige Bild muß also verworfen werden.

Zweitens: Wir setzen, Schrödingers ursprünglicher Hypothese ähnlich, voraus, daß jedes Teilchen in Wirklichkeit ein ausgebreitetes Wellenpaket ist. Die Welle, die von links kommt, fällt auf beide Schlitzte, aber interferiert rechts vom Schirm *I*. Im Prozeß der Absorption zieht sich die Welle auf ein kleines Gebiet um das absorbierende Zentrum zusammen.

Dieses Bild ist analog dem, das wir für das Photon vorgeschlagen haben. Es gestattet uns, alle Erscheinungen zu interpretieren: Betrachten wir ein Teilchen. Die dazugehörige Welle fällt auf den Schirm *I*. Wenn beide Schlitzte *A* und *B* offen sind, dann wird die Welle, falls sie von *I* nicht absorbiert wird, durch beide Schlitzte hindurch gehen, und die zwei Teile werden miteinander interferieren. Im Endresultat wird die ganze Welle in einem Punkt von *II* absorbiert. Die Absorptionswahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Teilen von *II* sind proportional $|\psi|^2$.

Auf diese Weise können wir die experimentellen Resultate verstehen, die man mit den zwei oben besprochenen Anordnungen erhält: erstens, die Anordnung mit den zwei von Zählrohren bedeckten Schlitzten und zweitens, die Anordnung mit offenen Schlitzten und Indikatoren auf dem Schirm *II*. In der ersten Anordnung fällt die Welle auf beide Zählrohre, wird aber absorbiert von einem der beiden. Welches der Zählrohre das Teilchen absorbiert, mag von Phasenbeziehungen usw. abhängen. Statistisch haben beide Zählrohre ungefähr dieselbe Einfangswahrscheinlichkeit, falls die Schlitzte gleich beschaffen sind. Wenn beide Schlitzte offen sind, dann zieht sich die Welle erst, nachdem sie auf den Schirm *II* aufgefallen ist zusammen (natürlich falls sie nicht bereits vom Schirm *I* absorbiert worden ist). Die Zusammenziehung wird bevorzugt in der Nähe der Interferenzmaxima stattfinden.

§ 12. Dirac¹⁵⁾ macht in seinem Buch „Principles of Quantum Mechanics“, S. 8, die folgende Bemerkung:

„Damit ein Photon in einem definitiven translatorischen Zustand sei, muß es nicht notwendigerweise mit einem einzigen Lichtstrahl assoziiert werden. Es mag vielmehr mit zwei oder mehreren Lichtstrahlen assoziiert werden, die die Komponenten sind, in welche ein ursprünglicher Strahl gespalten worden ist“. . . . „Betrachten wir nun, was geschieht, wenn wir die Energie eines der Komponenten bestimmen. Das Resultat einer solchen Bestimmung muß entweder das ganze Photon oder gar nichts sein. Das Photon muß sich also plötzlich verändern von dem Zustand, in dem es zum Teil in einem und zum Teil im anderen Strahl sich befand, in einen Zustand, wo es sich völlig in einem Strahl befindet. Dieser plötzliche Wechsel wird durch die Störung des translatorischen Zustandes des Photons, die die Beobachtung notwendigerweise hervorruft, bewirkt“.

¹⁵⁾ P. Dirac, Principles of Quantum Mechanics, 3. Aufl., Oxford 1947.

Diese obige Aussage steht in naher Analogie zu unserer Behauptung, daß die Wellenfunktion sich zusammenzieht, jedoch wird gewöhnlich diese Zusammenziehung in einer anderen Weise verstanden.

Wir geben ein zweites Zitat aus Diracs Buch (Seite 9). Dieses Zitat scheint uns wichtig im Zusammenhang mit dem Problem des Benehmens einzelner Teilchen.

„Einige Zeit vor der Entdeckung der Quantenmechanik erkannte man schon, daß der Zusammenhang zwischen Lichtwellen und Photonen statistischer Natur sein müsse. Was man damals aber nicht klar erkannte, war, daß die Wellenfunktion uns Information gibt über die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon sich an einem bestimmten Platze befindet und nicht über die wahrscheinliche Zahl von Photonen an diesem Platze. Die Wichtigkeit dieser Unterscheidung kann in der folgenden Weise klar gemacht werden. Setzen wir voraus, daß ein Lichtstrahl, der aus vielen Photonen besteht, in zwei Komponenten gleicher Intensität gespalten würde. Gemäß der Annahme, daß die Intensität eines Strahls mit der wahrscheinlichen Anzahl von Photonen verbunden ist, sollten wir annehmen, daß die Hälfte der Gesamtzahl der Photonen in jede der Komponenten ginge. Wenn nun die zwei Komponenten zur Interferenz gebracht werden, müßten wir annehmen, daß ein Photon in einer Komponente imstande sein müßte, mit einem Photon aus der anderen Komponente zu interferieren. Manchmal müßten jene zwei Photonen sich gegenseitig vernichten, in anderen Fällen müßten diese zwei Photonen vier Photonen erzeugen. Dies würde der Erhaltung der Energie widersprechen¹⁶⁾.

Die neue Theorie, welche die Wellenfunktion mit der Wahrscheinlichkeit eines Photons verbindet, überbrückt diese Schwierigkeit, indem sie annimmt, daß jedes Photon zum Teil in jeden der Strahlen geht. Jedes Photon interferiert mit sich selbst. Interferenz zwischen zwei verschiedenen Photonen kommt niemals vor.

Die oben besprochene Verbindung von Teilchen mit Wellen bezieht sich nicht nur auf den Fall des Lichtes, sondern hat im Sinne der modernen Theorien universale Anwendungsmöglichkeit“.

Diese Zitate, die den anerkannten Standpunkt der Quantenmechanik repräsentieren, zeigen, daß man annehmen muß, daß ein Photon oder ein Elektron, wenn es einem Hindernis begegnet, sich in einem überlagerten Zustand ausbreitet. Danach verursacht die Messung eine solche Störung, die den überlagerten Zustand plötzlich in einen einfachen Zustand in der Weise $\psi \rightarrow \psi_k$ übergehen läßt. Dieser plötzliche Wechsel mag als Zusammenziehung bezeichnet werden, er mag entweder eine wirkliche Zusammenziehung im Raum bedeuten, also z. B. den Prozeß, in dem ein Photon absorbiert wird, oder ein Elektron von einem Atom eingefangen wird, aber dieser Prozeß mag auch „eine Zusammenziehung im Hilbert Raum“ bedeuten, d. h. eine Zusammenziehung von einem komplexen Zustand in einen einfacheren Zustand.

Der Unterschied zwischen meinem und dem orthodoxen Standpunkt ist der, daß ich der Meinung bin, daß diese Zusammenziehung ein wirklicher Prozeß ist, den man untersuchen und beschreiben müßte, während der orthodoxe Standpunkt

¹⁶⁾ Diese Annahme muß auch auf Grund der Vavilovschen Schwankungs-Experimente ausgeschlossen werden. (L. J.).

behauptet, daß diese Zusammenziehung kein wirklicher Prozeß ist, sondern nur etwas, was sich in unseren Gedanken vollzieht.

Dirac vermeidet sorgsam, sich über die Natur dieser Zusammenziehung auszusprechen. Er beschränkt sich darauf, zu betonen, daß diese Zusammenziehung etwas sei, was nicht durch ein Modell, d. h. — nach Dirac — nicht durch ein klassisches Bild dargestellt werden könnte. Warum aber eine solche Beschreibung unmöglich sein sollte, wird nicht erklärt. Die Gründe, warum eine solche detaillierte Beschreibung für unmöglich gehalten wird, sind aber wohl die folgenden. 1. Eine solche Beschreibung würde notwendigerweise mit der Annahme von Überlichtgeschwindigkeit operieren müssen, 2. das Bild wäre unvereinbar mit einer linearen Theorie; wir kommen noch auf diese Frage zurück. Wenn wir dagegen Überlichtgeschwindigkeit und nicht-lineare Theorien nicht ausschließen, dann scheint es kein gültiges Argument zu geben, warum es kein Modell geben sollte, das den Details des Zusammenziehungsprozesses nicht entsprechen könnte. Es muß natürlich eingeräumt werden, daß die mathematische Durchrechnung eines solchen Modells auf ernste mathematische Schwierigkeiten stoßen könnte.

Wir sehen also, daß nach Dirac die Beobachtung des Photons in so einer Weise stört, daß es den Zustand des Photons von einem Zustand, in dem es über mehrere Strahlen verteilt war, in einen Zustand bringt, in dem es sich nur in einem Strahl befindet. Die Bohrsche Schule interpretiert diese Erscheinung in der folgenden Weise: das Wellenfeld beschreibt nur unser Wissen über das Photon. Nachdem der Weg des Photons gespalten ist, wissen wir nicht mehr, ob sich das Photon in der einen oder der anderen Komponente befindet. Dieser „Zustand unseres Wissens“ wird durch ein Wellenfeld beschrieben, das sich über beide Strahlen ausbreitet. Wenn nun durch Beobachtung festgestellt wird, daß das Photon sich tatsächlich in einem der Strahlen aufhält, dann wird durch diese Beobachtung der Zustand unseres Wissens geändert, nämlich die Unsicherheit, in welchem Strahl das Photon sich befindet, ändert sich zu der Gewißheit, daß sich das Photon in einem der Strahlen befindet. Die plötzliche Änderung der Wellenfunktion beschreibt angeblich die plötzliche Änderung unseres Wissens über den Zustand des Photons.

Die obige Beschreibung, die voraussetzt, daß die Wellenfunktion nichts weiter als unser Wissen über das System beschreibt, ist in Wirklichkeit künstlich und unvollständig. Wie wir an mehreren Beispielen zu zeigen versucht haben, muß man die Wellenfunktion mit dem wirklichen Zustand eines Systems in Zusammenhang bringen und nicht mit unserem subjektiven Wissen über den Zustand. Daher kann die Wellenfunktion nicht davon beeinflusst werden, was wir zufällig über das System wissen.

Um diese mystische Rolle des Beobachters, über die so viel geschrieben wird, loszuwerden, ist es nötig, den Prozeß der Beobachtung in größeren Details zu beschreiben. Was z. B. ist der Prozeß, der nach Dirac das Photon lokalisiert? Wenn wir analysieren wollen, was eine Beobachtung ist, ist es sehr wichtig, daß wir uns dabei nicht damit zufrieden geben, daß wir ideale Experimente mit γ -Strahlmikroskopen usw. beschreiben, sondern wir müssen uns mit wirklichen Experimenten beschäftigen, die, wenn nötig, im Laboratorium tatsächlich ausgeführt werden können. Der Mystizismus, der im allgemeinen mit der Rolle und den Effekten der Beobachtung einhergeht, muß zum großen Teil dem zugeschrieben werden, daß die Probleme oft mit Hilfe von unausführbaren, idealen Experimenten besprochen werden.

§ 13. Ein wichtiges Kennzeichen eines wirklichen Experimentes ist das, daß die Ablesung oder Beobachtung sich auf einen makroskopischen Effekt bezieht. Auch wenn wir einen mikroskopischen Effekt beobachten wollen, müssen wir immer eine Anordnung benutzen, in der der mikroskopische Effekt einen makroskopischen Effekt auslöst. Obwohl dies sehr gut bekannt ist, mag es trotzdem von Nutzen sein, einige Arten solcher Experimente kurz zu beschreiben.

1. Registrierung von Elementarteilchen in photographischen Platten. Das Elementarteilchen trifft auf ein lichtempfindliches Korn der Emulsion. In dem Korn wird eine bestimmte, kleine Anzahl von Ionen erzeugt, und das ionisierte Korn kann entwickelt werden; das heißt der mikroskopische Prozeß der Erzeugung einiger Ionen löst mit Hilfe einer Kettenreaktion einen makroskopischen Prozeß aus, nämlich die Entwicklung des Korns.

2. Wilson-Kammer-Beobachtung. In Zusammenstößen werden Ionen erzeugt. Unter günstigen Umständen ist jedes Ion imstande, kurz nach der Expansion Wassermoleküle um sich zu sammeln, und daher entsteht an der Stelle des Ions ein makroskopischer Tropfen. Der makroskopische Tropfen ist daher ausgelöst von einem mikroskopischen Ereignis.

3. Zählrohre mit Gasentladung. Ein einfallendes Elementarteilchen ionisiert zumindest ein Gasmolekül innerhalb des Zählrohrs. (In den gebräuchlichen Zählrohren ist ein Ion tatsächlich genug, um die Zählrohrentladung auszulösen.)

Das Ion wird durch das elektrische Feld im Zählrohr beschleunigt, und eine Ionenlawine wird ausgelöst. Die Lawine wächst und erreicht makroskopische Dimensionen, und die erzeugte elektrische Störung kann mit makroskopischen Mitteln beobachtet werden.

4. Elektronen-Vervielfacher. Ein Photon stößt auf ein Atom und erzeugt ein Photo-Elektron. (Der Zusammenstoß kann im Inneren oder auf der Oberfläche einer Kathode vorsichgehen.) Das Elektron wird durch ein äußeres Feld beschleunigt, stößt auf eine nächste Elektrode und erzeugt mehr Sekundärelektronen. Jedes der Sekundärelektronen erzeugt in derselben Weise mehrere Tertiärelektronen und ungefähr in der zehnten Generation wächst die Elektronenlawine zu einer solchen Größe, daß sie nunmehr makroskopisch beobachtet werden kann.

5. Beobachtung kleiner Photonzahlen mit freiem Auge. Die Schwingungserscheinungen, die von Wavilow beschrieben und ausgeführt wurden, zeigen, daß das menschliche Auge auf kleine Gruppen von Photonen schon anspricht. Diese Empfindlichkeit beruht auch im wesentlichen auf komplizierten Kettenreaktionen, die durch primäre mikroskopische Effekte ausgelöst werden.

Ein wichtiges Merkmal eines Vorganges, in dem ein mikroskopisches Ereignis ein makroskopisches hervorruft, ist, daß das makroskopische Ereignis eine solche Endgültigkeit besitzt, die vernünftigerweise nicht in Frage gestellt und die nicht von einem Beobachter abhängig gemacht werden kann. Ob ein mechanisches Zählwerk gezählt hat oder nicht, ist klarerweise unabhängig davon, ob sich jemand in der Nähe befand und zusah. (Dies ist trivial für den Materialisten, aber die extremen Positivisten sind doch anderer Meinung.) Es ist eine der wichtigsten Schlußfolgerungen, daß, sofern das Zählen des mechanischen Zählwerks eine objektive Realität ist, auch die Existenz des ionisierten Atoms, das irgendwie die Ionenlawine auslöste, objektive Realität besitzen muß.

Sehen wir uns dies an Hand einer experimentellen Anordnung, die, wenn nötig, auch gebaut werden könnte, an. Betrachten wir also die Anordnung, die in Abb. 5 gezeigt ist. Die Anordnung besteht aus drei geeigneten Entladungsröhren. Die erste C_1 und die dritte C_3 registrieren den Eintritt bzw. das Verlassen eines Elektrons. Die mittlere Sektion ist elektrisch in eine Anzahl von Sektionen geteilt. Eine Reihe von Verstärkern registriert, in welcher der Abteilungen das durchgehende Elektron wenigstens ein Ion erzeugt hat. Ein Entladungsröhr von der hier beschriebenen Art ist durchaus konventionell und kann im Laboratorium gebaut werden.

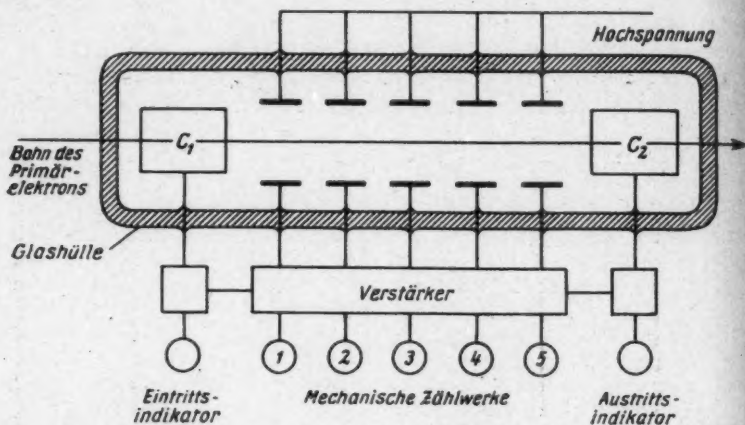


Abb. 5. Schema einer Anordnung zur Lokalisierung von Ionen, erzeugt durch ein primäres Elektron

Die Verstärker werden durch elektrische Entladungen ausgelöst, die ihrerseits durch Ionen ausgelöst werden, welche das primäre Elektron auf seiner Bahn hinterläßt. Die Entladungen entwickeln sich aber nur dann, wenn ein elektrisches Feld angeschaltet wird, das die Ionen beschleunigt. Die Feststellung der Existenz von Ionen braucht keineswegs sofort nach dem Durchgang des primären Teilchens zu erfolgen. Wenn wir das elektrische Feld erst einige Zeit nach dem Durchgang des primären Teilchens einschalten, dann kommen die Ionenlawinen eben erst später zustande, und wir stellen nur zu diesem späteren Zeitpunkt fest, wo und ob Ionen produziert worden sind. Im Falle einer solchen verzögerten Beobachtung müssen wir verhindern, daß Ionen zu weit von dem ursprünglichen Ort diffundieren. Dies mag z. B. mit Hilfe eines geeigneten magnetischen Feldes geschehen.

Nehmen wir an, daß die mittlere Sektion aus fünf Untersektionen besteht, dann wird ein typisches Beobachtungsergebnis folgendermaßen aussehen:

$$O \times O O \times$$

wo O bedeutet, daß in der entsprechenden Untersektion kein Ion gefunden worden ist, während \times bedeutet, daß wenigstens ein Ion in der Untersektion erzeugt worden ist. Das oben beispielsweise angeführte Resultat entspricht dem Falle, daß Ionen in der zweiten und fünften Sektion erzeugt wurden, aber keine Ionen in den anderen Sektionen. Wenn wir viele primäre Elektronen nacheinander

beobachten, können wir die relativen Wahrscheinlichkeiten der Ionenbildung in den fünf Untersektionen statistisch bestimmen. Wir können also feststellen, daß p_1, p_2, \dots, p_5 die relativen Wahrscheinlichkeiten der Ionenerzeugung in den Sektionen sind.

Betrachten wir nun die Beschreibung dieses Prozesses nach der Quantentheorie. Das einfallende Elektron mag durch ein Wellenpaket beschrieben werden. Die Länge des Paketes muß mehrere de Broglie-Wellen betragen, aber es muß doch kurz sein, da die Zeiten des Eintrittes und Austrittes kurz hintereinander erfolgen. Die Atome der Gasfüllung im Entladungsrohr müssen nun als Störungscentren betrachtet werden. Sie können als Perturbationen in die Gleichung des freien Teilchens eingeführt werden. Im Anfangszustand haben wir danach einen Zustand, der neutrale Atome und ein Elektron in Form eines Paketes enthält. Im Endzustand dagegen haben wir eine Wellenfunktion, die zusammengesetzt ist aus dem Anfangszustand und aus einer sehr großen Zahl von solchen Zuständen, in welchen ein oder mehrere Gasatome ionisiert oder angeregt sind. Das heißt, als das Resultat des Durchganges des primären Teilchens durch das Gas entsteht ein Zustand, in dem jedes der Gasatome mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit ionisiert erscheint.

Die Wellenfunktion, die den Endzustand beschreibt, sieht also etwa folgendermaßen aus

$$\psi = \sum A_k \psi_k,$$

wo $\psi_k = \psi(k_1, k_2, \dots, k_N)$ den Zustand beschreibt, in dem die Atome k_1, k_2, \dots, k_N ionisiert sind. Nach der Quantentheorie wird vorausgesetzt, daß eine Messung eine Störung zur Folge hat, so daß die Wellenfunktion ψ von dieser komplizierten Superposition in einen einfachen Zustand springt. In dem einfachen Zustand ist eine bestimmte Zahl von Atomen tatsächlich ionisiert, und die übrigen Atome bleiben tatsächlich neutral.

Wir erwarten also, daß die Messung einen Zustandswechsel $\psi \rightarrow \psi_k$ bewirkt. Aber was ist diese Messung, die den Zustandswechsel $\psi \rightarrow \psi_k$ tatsächlich zustande bringt? Das Anschalten des elektrischen Feldes kann für diesen Übergang nicht verantwortlich gemacht werden. Das Anschalten des Feldes bewirkt die Beschleunigung von Ionen, und damit das Auslösen von Elektronenlawinen, die später mechanisch verstärkt werden. Aber es ist klar, daß das Anschalten des Feldes selbst den Übergang $\psi \rightarrow \psi_k$ nicht bewirken kann. Das elektrische Feld ist vom Standpunkt der Wellenmechanik nichts weiter als eine zusätzliche, zeitabhängige Perturbation in der Schrödinger-Gleichung, und das Feld bewirkt, daß jedes Gasatom sich in Bewegung setzt, sofern es ionisiert ist. Danach bewirkt also das Feld, daß jedes Atom sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in Bewegung setzt und sekundäre Ionen erzeugt, die nun doppelt hypothetisch sind, da sie das wahrscheinliche Resultat von Zusammenstößen sind, die selbst nur dann stattgefunden haben, falls das stoßende Teilchen ionisiert war.

Aus all dem entsteht eine große Anzahl von wahrscheinlichen Ionenlawinen, diese selbst lösen mit gewisser Wahrscheinlichkeit die verschiedenen möglichen Kombinationen der Zählwerke aus, aber irgendwie klärt sich der hypothetische Nebel und am Ende spricht genau eine Kombination der Zählwerke an.

Die extremen Positivisten sagen, daß die Verstärker zusammen mit den mechanischen Zählwerken mit als Teil des quantenmechanischen Systems betrachtet werden können, und der Endzustand dieses Systems sei eine Superposition von

vielen Komponenten; jeder der Komponenten kann einer Kombination von entsprechenden Zählwerken zugeordnet werden. Nach dieser extremen Anschauung werden die Zählwerke nur mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zum Ansprechen gebracht, und sie „entschließen sich“, ob sie ansprechen werden oder nicht erst in dem Augenblick, wo Seine Majestät der Beobachter eintritt und sie ansieht.

Dies natürlich ist Unsinn. Die Frage muß aber doch gestellt werden: in welchem Stadium bildet sich der einfache Zustand aus dem ursprünglichen gemischten Zustand aus und weiter: wie entsteht ein einfacher Zustand? Es ist ganz sicher, daß die Zählwerke in einer definitiven Weise registrieren werden, unabhängig von jedem Beobachter. Daher muß sich die Konfiguration schon in einem früheren Stadium ausgebildet haben, bevor es zum Ansprechen der Zählwerke kam.

Es wäre am einfachsten, wenn man annehmen könnte, daß gleich von Anfang an das Primärteilchen nur ganz bestimmte Atome ionisiert hatte, und daß die verschiedenen möglichen Anfangszustände nur statistisch zu deuten seien. Diese Annahme ist aber unvollständig, denn sie läßt die experimentell bestätigte Interferenz von gleichzeitig koexistierenden Zuständen aus. In der Tat zeigt die richtige Beschreibung der Interferenz gerade den großen Fortschritt, den die Quantenmechanik gegenüber der alten, klassischen Mechanik gebracht hat, und deswegen muß die Koexistenz von stationären Zuständen beibehalten werden: (S. Dirac-Zitat.)

§ 15. Wir müssen also zur vollkommenen Beschreibung der Phänomene annehmen, daß es im mikroskopischen Zustand superponierte Zustände gibt, aber wir müssen ferner annehmen, daß solche superponierte Zustände nicht streng stationär sein können. Wir müssen, um den Widerspruch zwischen den Interferenzeffekten, die die Koexistenz von stationären Zuständen beweisen, und der Tatsache, daß Beobachtungen der Art, wie sie vorhin beschrieben wurden, zu eindeutigen Ergebnissen führen, aufklären zu können, annehmen, daß wir den Formalismus der Quantentheorie zu einem gewissen Grade abändern müssen. Wir müssen eine Annahme machen, nach der superponierte Zustände eine Zeitlang koexistieren können, nach der aber ein solcher gemischter Zustand nicht mehr streng stationär bleiben darf, sondern mit der Zeit von selbst in einen einfachen Zustand übergeht. Wir beleuchten die Notwendigkeit einer solchen Annahme durch ein zweites Beispiel, das von dem im folgenden beschriebenen Experiment ausgeht. Betrachten wir ein Primärteilchen, das ein Entladungsrohr, welches Gas unter niedrigem Druck enthält, durchquert. Der Druck im Entladungsrohr soll so klein sein, daß das Primärteilchen durchschnittlich ungefähr nur einen Zusammenstoß erleidet auf seinem Weg durch das Rohr. Die Zusammenstöße des Primärteilchens regen gewisse Atome an. Nach dem Durchgang des Primärteilchens werden die angeregten Atome Photonen mit charakteristischen Frequenzen emittieren. Setzen wir nun voraus, daß das emittierte Licht gesammelt und auf ein Beugungsgitter geworfen wird, und daß sich hinter dem Gitter Elektronen-Vervielfacher befinden, die so angeordnet sind, daß sich die einzelnen Kathoden an solchen Stellen befinden, an denen man die Spektrallinien der charakteristischen Frequenzen zu erwarten hat. Nach dem Durchgang des Primärteilchens wird im allgemeinen ein (manchmal vielleicht mehrere) Elektronen-Vervielfacher ansprechen. Falls ein Vervielfacher anspricht, wird man schließen können, daß ein Gasatom in einem bestimmten Zustand angeregt worden ist und daß das Atom später in den Anfangszustand zurückgefallen ist und ein seiner Anregung entsprechendes charakteristisches Photon emittiert hat.

Die orthodoxe, quantentheoretische Beschreibung dieses Prozesses würde (analog zu dem früher besprochenen Fall) die folgende sein. Das Primärteilchen kann durch ein Wellenpaket dargestellt werden und die Gasatome durch die Wellenfunktionen, die den Grundzuständen der Atome entsprechen. Als Folge der Wechselwirkung zwischen Primärteilchen und Gasatomen wird die Wellenfunktion nun eine Superposition von vielen Funktionen sein. Diese Superposition enthält einerseits den Anfangszustand, aber andererseits viele Zustände, die angeregte Atome enthalten. Wegen der spontanen Emission von Photonen ändert sich die Wellenfunktion weiter, bis schließlich die angeregten Zustände aussterben, und wir im Endresultat eine Wellenfunktion erhalten, die aus vielen Komponenten superponiert ist; jede Komponente enthält eine bestimmte Anzahl von Photonen. Aber falls wir diese Superposition ernst nehmen, müssen wir annehmen, daß alle diese Photonen gleichzeitig existieren, so daß jedem Photon eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, die viel kleiner als eins ist, zugeordnet wird.

Die Beobachtung soll nun diesen komplizierten, superponierten Zustand stören, und als Resultat der Störung soll der Zustand in einen einfachen Zustand übergehen, in dem die Gespenster von Photonen verschwinden und wirkliche Photonen, die mit 100 % Wahrscheinlichkeit existieren, übrigbleiben.

Wie in dem vorigen Beispiel ist es auch hier schwierig zu sehen, was diese Beobachtung ist, die den magischen Effekt hat, den komplizierten Zustand zu vereinfachen. Um die Schwierigkeit klar zu sehen, bemerken wir, daß wir in dem obigen Experiment die Elektronen-Vervielfacher auch sehr weit vom Gitter placieren können, und daß wir damit den Zeitpunkt des letzten Schrittes der Beobachtung verzögern können. (Wir denken an die Zeit, welche Photonen benötigen, um die Elektronen-Vervielfacher zu erreichen.) Falls wir also das Auslösen der Elektronen-Vervielfacher als die „wirkliche Beobachtung“ betrachten, können wir es so einrichten, daß diese Beobachtung erst eine geraume Zeit, nachdem die Zusammenstöße erfolgt sind, stattfindet. Es scheint aber unvernünftig anzunehmen, daß der komplizierte, superponierte Zustand eine lange Zeit bestehen bleiben soll, nur deswegen weil es uns beliebt hat, die Elektronen-Vervielfacher weit vom Gitter aufzustellen. Es scheint viel naturgemäßer anzunehmen, daß in Wirklichkeit gar nicht die „Beobachtung“ den einfachen Zustand zustande bringt, sondern vielmehr, daß ein superponierter Zustand eine natürliche Tendenz besitzt, sich zu vereinfachen. Es scheint also vernünftig anzunehmen, daß ein Zustand, der zwei Photonen mit je 50 % Wahrscheinlichkeit enthält, kein wirklich stationärer Zustand ist, und daß ein solcher Zustand auch ohne äußere Einwirkung von selbst in einen Zustand übergehen wird, der nur ein Photon mit 100 % Wahrscheinlichkeit enthält, während die andere Komponente von selbst verschwindet.

V. Ein qualitativer Versuch zur Modifikation der Wellenmechanik

§ 16. In den vorhergehenden Abschnitten haben wir Experimente an einzelnen Photonen und einzelnen Elementarteilchen beschrieben und analysiert. Wir haben uns auf die experimentellen Resultate von Wavilo gestützt, in denen die Effekte einzelner Photonen durch Schwingungserscheinungen offenbar werden. Die Experimente, die wir betrachteten, sind wirkliche Experimente, d. h. solche, die wirklich ausgeführt worden sind, oder die zumindest mit üblichen Anordnungen ausgeführt werden können.

Wir setzen uns hier zum Ziel, diese experimentellen Resultate vorurteilsfrei zu analysieren. Wir stellen uns die Frage, wie z. B. ein klassischer Physiker, der die Postulate der Quantentheorie nicht kennt, diese Resultate angesehen haben würde, und wie er sie interpretiert hätte. Würde ein solcher Physiker geföhlt haben, daß ihn diese Resultate zwingen, die klassische Vorstellung aufzugeben, oder aber — nicht gehemmt durch Vorurteile — würde er ein für Elektronen und Photonen gültiges Modell konstruiert haben?

Nach meiner Ansicht würde ein solcher Physiker tatsächlich ein klassisches Modell konstruiert haben. Warum die tatsächliche Entwicklung der Physik nicht zu einem solchen Modell geführt hat, sondern in eine andere Richtung gegangen ist, mag verschiedene Gründe haben. Daß man glaubte, daß ein klassisches Modell unmöglich sei, mag damit in Zusammenhang stehen, daß die Ergebnisse eines nach dem anderen gefunden wurden, und wir erst jetzt imstande sind, alle die Erscheinungen auf einmal zu überblicken. Auch mußte es schwer gefallen sein, mit den tief eingewurzelten Ideen der Relativitäts- und Quantentheorie, die so große Anfangserfolge zeigten, zu brechen, als sich Schwierigkeiten zeigten. Einige Physiker sahen die Schwierigkeiten, die den modernen Ideen eigen sind, sehr klar. Wir nennen in erster Linie Max Planck¹⁷⁾.

Wir machen nun den Versuch einer qualitativen Skizze eines klassischen Modells. Am Ende dieses Abschnittes will ich als Illustration der qualitativen Ideen eine Modifikation der Schrödingergleichung diskutieren. Diese Diskussion soll nur den Zweck haben, zu zeigen, daß die hier ausgeführten Überlegungen zumindest mathematisch nichts Unmögliches fordern.

§ 17. Das qualitative Bild, das die Eigenschaften eines Photons oder anderer Elementarteilchen beschreibt, wurde mehrfach in diesem Artikel skizziert, und wir können es in der folgenden Weise zusammenfassen.

1. Das Photon breitet sich im leeren Raum im wesentlichen nach den Maxwell'schen Gleichungen aus; das Photon muß daher als eine ausgedehnte Struktur betrachtet werden, deren Dichte in jedem Punkt als proportional der Energiedichte des Feldes angesehen werden kann. Die Eigenschaften des Photons werden aber von den Maxwell'schen Gleichungen aus zwei Gründen nicht völlig beschrieben. 1. Aus den Maxwell'schen Gleichungen kann man nicht erklären, warum eine Frequenz stets in Quanten der Energie $h\nu$ emittiert wird. 2. Die Maxwell'schen Gleichungen können nicht darüber Rechenschaft geben, warum eine ausgedehnte Welle in einem Punkt absorbiert wird.

Dagegen geben die Maxwell'schen Gleichungen ein gutes statistisches Bild der Eigenschaften vieler Photonen. Wir können jedoch Experimente mit einzelnen Photonen ausführen, und die Ergebnisse dieser Experimente können nicht einmal näherungsweise durch die Maxwell'schen Gleichungen erklärt werden. Eine Theorie, welche die Eigenschaften vieler Photonen statistisch richtig behandelt, ist sehr wertvoll; wir können aber nicht auf eine Beantwortung der Frage nach den Bewegungsgesetzen einzelner Photonen verzichten. Die Frage der Eigenschaften der einzelnen Photonen ist um so wichtiger, als die statistischen Ergebnisse über das Benehmen von vielen Photonen zeigen, daß die einzelnen Photonen voneinander unabhängig sind.

Wavilov hat z. B. gezeigt, daß ein dunkler Fleck in einem Interferenzbild nicht so zustande kommt, daß Photonen sich gegenseitig auslöschen, sondern daß im

¹⁷⁾ M. Planck, Die Physik im Kampf um die Weltanschauung, J. A. Barth, Leipzig 1937.

Gegenteil ein dunkler Fleck ein Gebiet ist, das für die Photonen nicht zugänglich ist. Jedes Photon daher wird (unabhängig von den anderen), wenn es durch ein Beugungsgitter geht, verhindert, sich in die Richtung eines dunklen Fleckes zu bewegen. Diese Tendenz kann nur erklärt werden, wenn man annimmt, daß jedes Photon mit dem ganzen Gitter in Wechselwirkung tritt; man sieht also, daß die Frage der Gesetzmäßigkeit einzelner Photonen nicht vermieden werden kann.

Wenn wir das Ergebnis eines gewöhnlichen makroskopischen Experimentes betrachten, beispielsweise das Interferenzbild, das hinter dem Beugungsgitter entsteht, dann interessieren wir uns nur für das statistische Benehmen der Photonen. Es ist völlig uninteressant, welche Photonen auf einen bestimmten Teil des Interferenzsystems fallen. Nichtsdestoweniger müssen wir uns aber dafür interessieren, welchen Gesetzmäßigkeiten die einzelnen Photonen gehorchen, so daß statistisch das bekannte Verhalten einer Gesamtheit von Photonen zustande kommt.

Die Problemstellung erinnert an die der kinetischen Gastheorie. Wenn wir die Eigenschaften einer Gasmenge betrachten, ist es uninteressant, was mit einem bestimmten Atom geschieht. Trotzdem aber sind die Eigenschaften der einzelnen, individuellen Atome, aus denen sich statistisch die Eigenschaften der Menge ableiten, von großem Interesse.

Im Falle des Photons wird oft behauptet, daß wir uns mit der statistischen Beschreibung zufrieden geben müssen, und daß es vergeblich sei, nach einem inneren Mechanismus der Photonen zu forschen — es ginge über unsere Kräfte, einen solchen Mechanismus zu finden. Diese Behauptung scheint uns ein Vorurteil zu sein, das sich durch mehrere Jahrzehnte festgesetzt und die natürliche Entwicklung gehindert hat.

Um den Mechanismus eines einzelnen Photons zu bekommen, müßte man versuchen, nicht-lineare Gleichungen für das elektromagnetische Feld zu formulieren. Diese Gleichungen müßten so beschaffen sein, daß sie in die Maxwell'schen Gleichungen übergehen, wenn man über die inneren Parameter von vielen Photonen mittelt. Dieser Mittlungsprozeß sollte wenigstens in guter Näherung auf die Maxwell'schen Gleichungen führen. Die Nichtlinearität der Gleichungen müßte die Quanteneffekte ergeben, wenn sie auf den Fall eines Photons angewendet würden, d. h. die Emission und Absorption von Energiebeträgen $h\nu$ sollte eine Folge der Nichtlinearität sein. Wie wir schon weiter oben gezeigt haben, müßte ein solches nicht-lineares Feld Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit enthalten.

2. Das Elektron. Der Unterschied zwischen dem Elektron- und Photonproblem besteht darin, daß Elektronen nicht wie Photonen emittiert oder absorbiert werden können. Nichtsdestoweniger haben wir es in beiden Fällen mit derselben Art von Problematik zu tun. Die Schrödingersche Gleichung beschreibt ausgezeichnet ein einzelnes Elektron in dem stationären Zustand. Sie beschreibt z. B. den stationären Zustand eines Elektrons in einem gegebenen Zustand des Wasserstoffatoms. Weiterhin beschreibt die Schrödingergleichung die Interferenzerscheinungen freier Elektronen. Wenn wir nun ein Elektron mit seiner Wellenfunktion identifizieren wollten, wie dies Schrödinger ursprünglich getan hat, (s. § 9, Abschnitt 1) dann könnten wir auf diese Weise viele Erscheinungen erklären. Jedoch hat genau wie im Falle des Photons ein solches Verfahren auch im Falle eines Elektrons seine Grenzen.

Betrachten wir ein Elektronen-Interferenzexperiment. Betrachten wir eine Elektronenwelle, die auf ein Gitter fällt, und das entstehende Interferenzbild. Nach der Schrödingerschen Theorie müssen wir annehmen, daß die Welle durch

die Wechselwirkung mit dem Gitter in viele Komponenten gespalten wird, und daß sich diese Komponenten in den Richtungen, die zu den hellen Stellen des Interferenzbildes führen, bewegen. Jedes der Elektronen, falls es lokalisiert wird, wird, nachdem es durch das Gitter gegangen ist, eingefangen oder erzeugt Ionen in der Umgebung eines bestimmten Fleckes. Da das Elektron nur entlang einer Bahn erscheint, muß man annehmen, daß in irgendeinem Stadium des Wechselwirkungsprozesses die gesamte Welle, die dem Elektron entspricht, sich in diesem Strahl zusammenzieht. Diese Zusammenziehung mag spontan vor sich gehen, die Möglichkeit ist aber auch nicht von der Hand zu weisen, daß die Kontraktion durch jene Wechselwirkung eingeleitet wird, die zu der Lokalisierung des Elektrons führt.

Was auch immer die Details dieses Prozesses sein mögen, muß man von einer vollständigen Theorie verlangen, daß sie den Mechanismus der Kontraktion beschreibt. Wenn nun eine geeignete nicht-lineare Modifikation der Schrödingerschen Gleichung die Bewegung eines einzelnen Elektrons beschreiben soll und zwar einschließlich der Kontraktion, dann müßte diese Beschreibung so aussehen, daß, gemittelt über die Anfangsparameter des Elektrons, die mittlere Bewegung des Elektrons entweder genau, oder zumindest in guter Approximation, im Einklang mit der gewöhnlichen Schrödingerschen Gleichung erfolgt. Die Anfangsparameter, über die diese Mitteilung vor sich gehen müßte, würden die Rolle einer Anfangsbedingung spielen, und die Werte dieser Parameter müßten bestimmen, in welchen der verschiedenen möglichen Zustände sich das Elektron zum Schluß befinden würde.

§ 18. Meine Ansicht ist also, daß das Elektron oder Photon eine ausgedehnte Struktur besitzt. So lange keine zu großen, äußeren Störungen auftreten, bewegt sich diese Struktur in guter Approximation nach den Schrödingerschen oder Maxwell'schen Wellengleichungen. Die exakte Bewegung der Strukturen wird dagegen durch gewisse nicht-lineare Gleichungen bestimmt. Lösungen dieser nicht-linearen Gleichungen weichen im Falle von starker Wechselwirkung von den Lösungen der linearen Gleichungen ab. Die Abweichungen sind wesentlich während des Prozesses der Kontraktion. Die Lösungen der nicht-linearen Gleichungen sollen aber derart beschaffen sein, daß, gemittelt über gewisse Parameter der Anfangsbedingungen, sie sich wenigstens annäherungsweise auf die Schrödingerschen oder die Maxwell'schen Gleichungen zurückführen lassen. Schematisch mögen wir annehmen, daß die Bewegung eines einzelnen Pakets durch eine Funktion $a(r, t; \alpha)$ beschrieben wird, dieses Paket bewege sich nach einer nicht-linearen Gleichung etwa

$$S^*(a) = \frac{\partial a}{\partial t}; \quad (2)$$

obwohl die wirkliche Gleichung nicht unbedingt von der ersten Ordnung in der Zeit sein müßte.

Um das richtige statistische Verhalten zu sichern, müssen wir annehmen, daß der Mittelwert von $|a|^2$, gemittelt über gewisse Werte von α gleich dem Mittelwert von ψ ist, z. B.

$$|\psi(r, t)|^2 = \int |a(r, t; \alpha)|^2 d\alpha, \quad (3)$$

wo ψ der gewöhnlichen Schrödingerschen Gleichung genügt. Die Gl. (3) ist nicht notwendigerweise die wirkliche Beziehung zwischen a und ψ . Wir haben die Gleichung nur aufgeschrieben, um unsere Idee zu illustrieren. Die Integration über α muß über eine bestimmte Mannigfaltigkeit der Lösungen von (2) ausgeführt

werden. Diese Lösungen mögen alle zur Zeit $t = 0$ ziemlich ähnliche Form besitzen, die Lösungen können sich aber trotzdem später voneinander stark entfernen.

Die Parameter α , die wir so eingeführt haben, sind im wesentlichen die „versteckten Parameter“, von denen Neumann bewiesen hat, daß es sie in der Quantentheorie nicht geben kann. Wir behaupten aber trotz des Beweises von Neumann, daß solche Parameter existieren können. Neumann hat nämlich nur bewiesen, daß es innerhalb der üblichen Quantentheorie keine versteckten Parameter geben kann, d. h. daß ein System, in dem versteckte Parameter eine Rolle spielen, sich nicht genau so benehmen wird, wie es nach der Quantentheorie zu erwarten wäre. Daher muß die Annahme einer Funktion $a(r, t; \alpha)$, die versteckte Parameter α einführt, zu Resultaten führen, die sich von den nach der Quantentheorie zu erwartenden Resultaten unterscheiden. Einen derartigen Unterschied zwischen unserem Modell und den Erwartungen der gewöhnlichen Quantentheorie gibt es tatsächlich. Dieser Unterschied kann am besten durch ein Beispiel erläutert werden.

§ 19. Wir betrachten den Fall eines Elektrons, das gegen eine Potentialwand anläuft. Die Bewegung des Pakets wird durch die Schrödingergleichung beschrieben: das Paket nähert sich langsam diffundierend der Potentialwand. An der Potentialwand spaltet sich das Paket in zwei Teile, der eine Teil wird reflektiert, der andere bewegt sich weiter. (Siehe Anhang.) Das Sichspalten des Pakets muß als ein sich tatsächlich abspielender Vorgang betrachtet werden. Man kann sich nämlich überzeugen, daß beide Teile tatsächlich gleichzeitig existieren. Die Teile können nämlich durch Reflexion wieder vereinigt werden, und bei der Vereinigung interferieren die Teile miteinander.

Dagegen wenn wir das Elektron nach der Reflexion lokalisieren, indem wir es auf ein Meßinstrument wirken lassen, dann wird das Meßinstrument so ansprechen, als ob das ganze Elektron sich ausschließlich in einem der beiden Pakete befände.

Die Quantentheorie behauptet, daß die Konzentration des Teilchens in eines der Teile des Paketes durch die Messung verursacht wird, d. h. die Quantentheorie behauptet, daß das Paket so lange gespalten bleibt bis das Teilchen durch das Meßinstrument lokalisiert wird und in diesem Augenblick die Messung die eine Hälfte des Paketes auslöscht, die andere Hälfte des Paketes aber zu einem ganzen Elektron ergänzt. Nach der Quantentheorie bewegen sich also die zwei Teile des Paketes in entgegengesetzter Richtung so lange keine Messung stattgefunden hat, und wenigstens im Prinzip könnten die getrennten Teile des Paketes eine beliebige Zeit nach ihrer Trennung noch immer zur Interferenz gebracht werden.

Während es nun experimentell als gesichert angesehen werden kann, daß das Elektron eine beliebig lange Zeit nach seinem Zusammenstoß mit der Potentialwand in einem der zwei Strahlen (durchgehender oder reflektierter Strahl) gefunden werden kann, so ist jedoch kein experimenteller Beweis dafür vorhanden, daß diese zwei Strahlen eine lange Zeit nach dem ursprünglichen Zusammenstoß noch immer interferenzfähig sind.

Die Behauptung der Quantentheorie, nach der solche zwei Strahlen beliebig lang kohärent bleiben, ist in keiner Weise experimentell bestätigt worden, und sie muß als höchst zweifelhaft angesehen werden.

Wir geraten daher mit keinem Experiment in Widerspruch, wenn wir annehmen, daß das Paket sich nach den Zusammenstoß mit der Potentialwand zwar zunächst tatsächlich spaltet, aber daß die Bruchstücke des Paketes nur eine beschränkte

Zeit in entgegengesetzte Richtungen sich bewegen. Da es keinen Beweis dafür gibt, daß die Bruchstücke des Paketes beliebig lang separiert bleiben, scheint es uns höchst plausibel anzunehmen, daß diese Separation dadurch langsam ihr Ende nimmt, daß der eine Teil des Paketes langsam den anderen Teil aufsaugt. Es ist daher plausibel anzunehmen, daß nach einer genügend langen Zeit nur eines der Bruchstücke übrig bleibt. Wir halten es daher für wahrscheinlich, daß das Elektron eine Zeit nach den Zusammenstoß sich in einem der Strahlen konzentriert und daß nachdem sich diese Konzentration vollzogen hat, eine Interferenz zwischen den zwei Strahlen nicht mehr zustande gebracht werden kann. Es scheint uns daher wahrscheinlich, daß die Wellenfunktion, die das sich spaltende Teilchen beschreibt, zunächst die wirkliche räumliche Ausdehnung des Teilchens beschreibt; nach einer bestimmten Zeit aber wird sich das Teilchen nur mehr in eine Richtung bewegen und nach dieser Zeit beschreibt die Schrödingersche Wellenfunktion, die weiter gespalten bleibt, nicht mehr die Bewegung des einen Teilchens, sondern sie fängt an, das statistische Verhalten vieler Teilchen zu beschreiben.

Bezeichnen wir mit ψ_1 den Teil der Wellenfunktion, der dem reflektierten Teil eines Paketes entspricht, und mit ψ_2 den Teil, der dem weitergehenden Teil des Paketes entspricht. Die Wellenfunktion eines Elektrons, nachdem es mit der Potentialwand zusammengestoßen ist, kann dann geschrieben werden als

$$\psi = A \psi_1 + B \psi_2$$

$$|A|^2 + |B|^2 = 1.$$

Wir nehmen nun an, daß für eine kurze Zeit nach dem Zusammenstoß $|\psi|^2$ die tatsächliche räumliche Verteilung des Elektrons wiedergibt. Später aber wird die räumliche Verteilung des Elektrons entweder durch $|\psi_1|^2$ oder durch $|\psi_2|^2$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die eine bzw. die andere Verteilung der tatsächlichen Verteilung des Elektrons entspricht, ist $|A|^2$ und $|B|^2$.

Daher braucht die Behauptung der Quantentheorie, daß ein überlagerter Zustand $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$ (wo ψ_1 und ψ_2 die sich voneinander entfernenden Pakete bedeuten) permanent den Zustand eines Elektrons beschreibt, nicht aufrecht erhalten zu werden, da sie experimentell nicht bestätigt ist. Nach meiner Ansicht beschreibt die Funktion anfänglich den Zustand eines Teilchens, aber allmählich degeneriert sie und beschreibt nunmehr nicht mehr den Zustand eines Teilchens, sondern die statistische Überlagerung von vielen möglichen Zuständen des Teilchens.

Mit Hilfe der Funktion $a(r, t; \alpha)$ mag dies in der folgenden Weise ausgedrückt werden. Zur Zeit $t = 0$ mögen zwei Anfangszustände existieren, die nicht sehr verschieden voneinander sind. Wir setzen also

$$a(r, 0, \alpha_1) \approx a(r, 0, \alpha_2) \approx \psi(r, 0). \quad (4)$$

Später, d. h. für große Werte von t entwickeln sich die zwei anfangs ähnlichen Zustände zu ganz verschiedenen Zuständen, so daß

$$a(r, t; \alpha_1) \approx \psi_1(r, t) \quad t \text{ groß.} \quad (5)$$

$$a(r, t; \alpha_2) \approx \psi_2(r, t)$$

Danach wird ein Teilchen entweder reflektiert, oder es dringt durch die Potentialwand; welche von den zwei Möglichkeiten tatsächlich zustande kommt, hängt von dem Wert des Parameters ab. Während nun die a -Funktion für einen festen

α -Wert nur einen dieser möglichen Prozesse beschreibt, enthält die ψ -Funktion beide Möglichkeiten mit ihren Wahrscheinlichkeitsamplituden. Die Gln. (4) und (5) stimmen im wesentlichen mit (3) überein, da nämlich das Kreuzglied $\psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2$ vernachlässigbar sein muß, weil doch ψ_1 und ψ_2 sich kaum überdecken, sobald die Pakete sich getrennt haben. Um vollkommene Übereinstimmung der beiden Beschreibungswesen zu bekommen, müssen wir annehmen, daß sich die Integrale $\int dx$ erstrecken über solche Bereiche von α_1 und α_2 , die zum einen bzw. anderen Endzustand führen, proportional den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind. Wir müssen also fordern, daß

$$\int_{\alpha_1} dx \sim |A|^2, \quad \int_{\alpha_2} dx \sim |B|^2. \quad (6)$$

Der Unterschied zwischen der alten Formulierung und unserer mag also in der folgenden Weise zusammengefaßt werden:

Setzen wir voraus, daß ein Teilchen an einer Potentialwand gespalten sei.

Wir beobachten nun das Teilchen lange nach dem Zusammenstoß. Die Beobachtung mag entweder in Form eines Interferenzexperimentes geschehen, in dem die gespaltenen Teile des Paketes zusammengebracht werden, das Experiment mag aber andererseits eines sein, in dem festgestellt wird, ob das Teilchen reflektiert wurde oder durch die Potentialwand durchgedrungen ist. Diese zwei Arten von Experimenten schließen sich gegenseitig aus. Wir können aber an einem Teilchen das eine oder das andere Experiment tatsächlich ausführen.

Nach der alten Auffassung zwingt ein Experiment der ersten Art das Teilchen, als ausgedehnte Welle zu erscheinen — während das zweite Experiment das Teilchen dazu bringt, als konzentriertes Wellenpaket zu erscheinen. Es hängt nun völlig vom Beobachter ab, welches der beiden Experimente er ausführt, und daher entscheidet der Beobachter, was mit dem Wellenpaket geschehen soll. Da nun auf diese Weise der Beobachter wesentlichen Einfluß darauf hat, was mit dem Teilchen geschehen soll, kann das Schicksal des Teilchens nicht ausschließlich aus den Werten innerer Parameter vorher bestimmt werden.

Nach meiner Ansicht dagegen hören die Strahlen auf, kohärent zu sein, falls wir lange genug warten, d. h. genügend lange nach dem Zusammenstoß können wir zwar den Ort des Teilchens bestimmen, und wenn wir viele solcher Ortsbestimmungen ausführen, erhalten wir Resultate, die statistisch mit der gewöhnlichen Quantentheorie übereinstimmen. Wenn wir dagegen die zwei Strahlen zur Interferenz bringen wollen eine lange Zeit, nachdem der Zusammenstoß erfolgt ist, dann würden wir meiner Meinung nach zu dem Ergebnis kommen, daß die Strahlen inkohärent geworden sind, und das experimentelle Resultat würde deswegen in Widerspruch zu den Vorhersagen der Quantentheorie ausfallen. Das heißt, nach einem begrenzten Zeitraum, während dem sich das Paket tatsächlich in gespaltenem Zustand befindet, müßte sich ein endgültiger Endzustand entwickeln. Der so beschriebene Prozeß kann durch ein deterministisches Modell beschrieben werden — in diesem Modell ist es nämlich nicht notwendig zu „prophezeien“, was für ein Experiment im Endresultat mit den Teilchen ausgeführt werden wird.

Um das von uns vorgeschlagene Bild zu vervollständigen, wollen wir noch das Folgende bemerken. Wenn wir annehmen, daß ein Paket im Laufe eines Zusammenstoßes sich spaltet, dann nehmen wir an, daß sich im Endresultat die gespaltenen Teilchen wieder zu einem Paket vereinigen werden, und daß dieses Paket entweder dem reflektierten oder dem durchgehenden Teilchen entspricht. Wir

nehmen dabei an, daß im Laufe einer genügend langen Zeit diese Vereinigung spontan vor sich gehen wird, nachdem nämlich die Teile des Paketes sich über eine bestimmte Grenze hinaus voneinander entfernt haben. Wir halten es aber für wahrscheinlich, daß diese Vereinigung der zwei Teile des Paketes katalysiert wird, falls das Paket mit Atomen in Wechselwirkung tritt, die sich zu beiden Seiten der Potentialwand befinden. Wenn nämlich das Paket einmal ein Atom zu einer Seite der Potentialwand angeregt oder ionisiert hat, dann muß es sich schon zu einem Paket, das sich ganz zu einer Seite der Potentialwand befindet, zusammengezogen haben. Dies muß ganz unabhängig davon geschehen sein, ob das angeregte oder ionisierte Atom beobachtet worden ist oder nicht.

Ob die orthodoxe Anschauung oder aber die hier vorgeschlagene deterministische Anschauung die Tatsachen besser beschreiben, könnte im Prinzip durch Experimente entschieden werden, die untersuchen, ob die Komponenten eines gespaltenen Elektronenstrahls für beliebig lange Zeiten kohärent bleiben. Ein Experiment dieser Art hat aber keine große Aussicht, in der vorgeschlagenen Form erfolgreich durchgeführt werden zu können, da nämlich die Komponenten ψ_1 und ψ_2 auch nach der orthodoxen Auffassung sich fast so benehmen würden, als ob sie inkohärent wären, da sie beide ein breites Spektrum von Frequenzen enthalten, die zu einer sehr komplizierten Interferenzerscheinung führen. Der Unterschied zwischen der alten und neuen Auffassung kann in die Frage zusammengefaßt werden, ob nach dem Zusammenstoß ein Elektronenstrahl besser beschrieben wird durch

$$|A \psi_1|^2 + |B \psi_2|^2 \quad (6a)$$

oder durch

$$|A \psi_1 + B \psi_2|^2. \quad (6b)$$

Wie schon erwähnt, ist es sehr schwierig, diese Frage experimentell zu entscheiden, da der Unterschied zwischen den zwei Ausdrücken effektiv sehr klein ist.

Wenn wir nun zugeben, daß es sehr schwer ist, zwischen den zwei Anschauungen experimentell zu entscheiden, so sind wir doch der Meinung, daß dem Ausdruck (6a) der Vorzug gegeben werden sollte, da dieser eine deterministische Beschreibung der Erscheinungen zumindest im Prinzip zuläßt, daß dagegen der Ausdruck (6b), der die Experimente in keiner Weise besser beschreibt als (6a), aber zu logisch unannehmbaren Resultaten führt, verworfen werden sollte.

§ 20. Während die Beobachtung der Reflexion und des Durchgangs eines Elektrons durch eine Potentialwand keine praktische Entscheidungsmöglichkeit zwischen unserer Anschauung und der alten Anschauung liefert, sind wir der Meinung, daß man auf anderem Gebiet wenigstens zwei experimentelle Möglichkeiten hat, die Richtigkeit unserer Anschauung zu untersuchen.

1. In Analogie zu der Erscheinung des gespaltenen Elektrons kann das Spalten eines Photons betrachtet werden. Die Frage mag nun gestellt werden, ob zwei kohärente Lichtstrahlen auch dann noch kohärent bleiben, wenn sie sich sehr weit voneinander entfernen. Diese Frage hängt aber nicht mit der bekannten Erscheinung der endlichen Kohärenzlänge des Lichtes zusammen. Es handelt sich vielmehr um das Folgende. Wenn wir ein Michelsonsches Interferometer betrachten, und wir die Länge der beiden Arme des Interferometers vergrößern, ohne die Phasendifferenz der zwei Strahlen zu vergrößern, hört dann die Interferenz auf, wenn die Arme zu lang sind? Ebenso kann die Frage gestellt werden,

ob im Falle des Sagnacschen Experimentes die Interferenz aufhört, wenn das Gebiet, um welches die Strahlen herumgeführt werden müssen, zu groß wird.

Wir sind der Meinung, daß in beiden Fällen die Interferenz aufhören würde, falls die Größe des Instruments eine bestimmte Schranke überschreiten würde, da doch zur Interferenz nötig ist, daß sich einzelne Photonen zeitweilig aufspalten. Im Falle einer zu großen Anordnung halten wir es für wahrscheinlich, daß die Teile des Photons eine Tendenz zeigen würden, sich spontan zu vereinigen, bevor sie ihren vorgeschriebenen Weg durch das Instrument vollendet haben. Wenn nun aber die Teile des Photons sich durch den von uns beobachteten Prozeß der Konstruktion vereinigen, dann würden die Strahlen inkohärent werden.

Das Michelsonsche und auch das Sagnacsche Experiment wurde mit verhältnismäßig großen Anordnungen ausgeführt, daher muß die obere Grenze bis zu der sich die Teile eines Photons voneinander entfernen können, groß sein und zumindest viele Meter betragen.

2. Wenn wir annehmen, daß das einem Elektron entsprechende Paket nicht permanent gespalten werden kann, dann liegt es auch nahe anzunehmen, daß das Paket selbst nicht beliebig groß gemacht werden kann. Wenn wir nun die Wellenfunktion des Elektrons in einem Wasserstoffatom betrachten, dann wissen wir, daß der Radius des Paketes, das dem Elektron in einem Zustand mit der Hauptquantenzahl n entspricht, gegeben ist durch

$$r_n = n^2 r_H,$$

wo $r_H \sim 10^{-8}$ cm den Bohr-Radius bedeutet. Falls sich also das Elektron nicht auf beliebig große Gebiete ausbreiten kann, dann müssen wir eine Änderung des Wasserstoffspektrums an Stelle großer Quantenzahlen erwarten. Die Balmer-Serie wurde bis zu Quantenzahlen von $n \sim 30$ experimentell beobachtet. Wir wissen also, daß sich eine Elektronenwolke zumindest auf ein Gebiet mit dem Radius

$$r_{30} \sim 10^{-6} \text{ cm}$$

ausbreiten kann. Die Beobachtung dieser Linien höherer Quantenzahlen ist aber recht ungenau, und es läßt sich nicht ohne weiteres entscheiden, ob diese Linien höherer Quantenzahlen tatsächlich genau die Frequenzen besitzen, die von der Theorie gefordert werden. Es wäre deswegen sehr wünschenswert, das Spektrum des Wasserstoffs im Gebiet sehr hoher Quantenzahlen genau zu untersuchen, um festzustellen, ob der von uns erwartete Effekt tatsächlich auftritt oder nicht.

3. Unser Bild des sich zusammenziehenden Photons führt zu einem einigermaßen paradoxen Resultat, und die Untersuchung der in dieser Auslegung auftretenden Effekte könnte eventuell von Bedeutung werden. Betrachten wir eine Kugelwelle, die von dem Atom A emittiert worden ist. Nehmen wir ferner an, daß sich Atome B, C, \dots in verschiedenen Entfernungen von A befinden und daß diese Atome imstande wären, das Photon zu absorbieren. Das dem Atom A nächstgelegene Atom, z. B. B , hat die Möglichkeit, das Photon zu absorbieren, bevor die Kugelwelle eines der anderen Atome überhaupt erreicht hat. Wenn aber das Atom B das Photon tatsächlich absorbiert, dann wird das Photon die anderen Atome überhaupt nicht mehr erreichen. Wenn sich also ein Atom B in der Nähe von A aufhält, dann sollte die Gegenwart dieses Atoms B die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon durch ein weiter abgelegenes Photon C absorbiert wird, verringern. Dies müßte auch dann eintreten, wenn C und B in verschiedenen

Richtungen von A aus gesehen liegen. Dies kann so zusammengefaßt werden, daß wir sagen, daß das Atom B um A herum nach allen Richtungen einen Schatten wirft. Da wir eine Theorie des sich zusammenziehenden Photons nicht proponieren können, hat es im Augenblick keinen Sinn, die Details dieses Prozesses genauer zu diskutieren. Es erscheint uns dagegen wünschenswert, Experimente an Photonen durchzuführen, um diesen Effekt näher zu untersuchen.

§ 21. Im folgenden geben wir nun ein schematisches Beispiel, um zu illustrieren, wie eine nicht-lineare Modifikation der Schrödingergleichung aussehen sollte. Wir betonen wieder, daß dieses Beispiel nur als Illustration gemeint ist. Der Einfachheit halber betrachten wir ein eindimensionales Einteilchen-Problem. Wir führen Atomeinheiten ein, d. h. wir postulieren $\hbar = m = 1$. Die gewöhnliche Schrödingergleichung lautet daher

$$-\frac{1}{2}\psi'' + V\psi = i\psi, \quad (7)$$

wo ' die Differentiation nach der x -Koordinate, während ' die Differentiation nach der Zeit t bedeutet. Die Amplitude a , die einer nicht-linearen Modifikation von (7) genügt, muß in guter Näherung der Gleichung (7) genügen, zumindest so lange als es sich um nicht zu weit ausgedehnte stationäre Zustände handelt. Der wesentliche Unterschied zwischen den Gleichungen, denen a und ψ genügen, muß aber darin bestehen, daß die Gleichungen für a nicht zu einer Ausbreitung von a auf zu große Gebiete führt. Die Modifikation der Schrödingergleichung kann daher durch die Einführung einer schwachen kohäsiven Kraft geschehen, die das Teilchen zusammenhält; diese kohäsive Kraft sollte aber stark anwachsen, falls die Größe des Pakets eine bestimmte Grenze überschreitet. Eine derart kohäsive Kraft kann in der folgenden Weise eingeführt werden. Wir schlagen als die für a gültige Gleichung vor

$$-\frac{1}{2}a'' + (V + \alpha^2 O(x))a = i\dot{a} \quad (8)$$

$$O(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-x') |a(x')|^2 dx',$$

wo $P(\xi)$ eine gerade Funktion der Variablen bedeutet, die monoton mit wachsendem $|\xi|$ wächst.

Um die Größenordnung festzulegen, bemerken wir, daß $1/\alpha^2$ die Dimension einer Länge besitzt. Wir mögen also $\alpha^2 = 1/L$ setzen, wo L die Entfernung ist, in welcher neue Effekte auftreten. Die Funktion $P(\xi)$ mag also in der folgenden Weise beschaffen sein:

$$\begin{aligned} P(\xi) &\sim 0 & |\xi| < L \\ P(\xi) &\gg 1 & |\xi| \gg L. \end{aligned}$$

Wir betrachten im folgenden die mathematischen Eigenschaften der Gl. (8).

1. Normalisierung. Aus Gl. (8) sehen wir, daß $O(x)$ real ist. Bezeichnen wir also mit * den komplex konjugierten Wert einer Größe, dann erhalten wir aus (8)

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (a' a^* - a^* a') = i \frac{\partial |a|^2}{\partial t}.$$

Wenn wir nun nach x von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren, dann finden wir, falls $a(x)$ genügend stark verschwindet, für $|x| \rightarrow \infty$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |a|^2 dx = 0.$$

Wir können also, ohne mit der Gl. (8) in Widerspruch zu geraten, verlangen, daß a normiert sei, d. h. wir können zu (8) die folgende Gleichung hinzusetzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a|^2 dx = 1. \quad (9)$$

Die BGl. (9), d. h. der Wert der Normalisierung von a , ist von Bedeutung, da die Gl. (8) nicht-linear ist. Gl. (9) ist keineswegs trivial, und die Funktion a ist überhaupt nur durch die Gln. (8) und (9) zusammen definiert.

2. Trennung der Variabeln. Wir setzen voraus $a(x, z) = A(x) \beta(t)$. Wenn wir dies in Gl. (8) einführen, dann haben wir, nach Division durch $a(x, t)$

$$\frac{1}{2} \frac{A''}{A}(x) - V(x) = \alpha^2 |B|^2 \bar{P}(x) + \frac{|\ddot{B}|}{B}(t) \quad (10)$$

mit

$$\bar{P}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-x') |A(x')|^2 dx'.$$

Da der Ausdruck auf der linken Seite von (10) die Zeit nicht enthält, muß also auch der auf der rechten Seite stehende Ausdruck von der Zeit unabhängig sein. Wenn wir nun Gl. (10) für zwei x -Werte, x_1 und x_2 , aufschreiben, wobei diese x -Werte so gewählt sind, daß $\bar{P}(x_1) \neq \bar{P}(x_2)$, dann erhalten wir nach Subtraktion

$$\alpha^2 |B|^2 (\bar{P}(x_1) - \bar{P}(x_2))$$

unabhängig von t , daher muß $|B|^2$ konstant sein, und wir haben

$$B = e^{i\beta(t)}, \quad \beta(t) \text{ reell.} \quad (11)$$

Wenn wir nun (11) in (10) einsetzen, dann finden wir, daß $\beta(t)$ von der Zeit linear abhängen muß, d. h.

$$a(x, t) = A(x) e^{-iEt} \quad (E \text{ reell})$$

muß für jede separierte Lösung bestehen. Die nicht-lineare Amplitudengleichung lautet also

$$-\frac{1}{2} A_k'' + (V + \alpha^2 \bar{P} - \bar{E}_k) A_k = 0, \quad (12)$$

wo der Index k den verschiedenen Eigenzuständen entspricht. Gl. (12) ist das Analogon der Schrödingerschen Amplitudengleichung,

$$-\frac{1}{2} \Phi_k'' + (V - E) \Phi_k = 0. \quad (13)$$

3. Stationäre Lösungen für ein freies Teilchen. Wir betrachten also die Lösung von Gl. (12) unter der Voraussetzung $V(x) = 0$. Um zunächst einen qualitativen Überblick zu erhalten, spezialisieren wir für den Augenblick die Funktion $P(x)$, indem wir voraussetzen

$$P(x) = \frac{1}{2} x^2. \quad (14)$$

Wenn wir (14) in (12) einführen, finden wir für den Fall $V = 0$

$$-\frac{1}{2} A_k'' + \frac{\alpha^2}{2} A_k \left\{ x^2 - 2x \int_{-\infty}^{+\infty} x' |A_k(x')|^2 dx' + \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2 |A_k(x')|^2 dx \right\} - E_k A_k = 0.$$

Durch eine geeignete Wahl des Ursprungs können wir erreichen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x' |A_k(x')|^2 dx' = 0. \text{ Wenn wir also}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2 |A_k(x')|^2 dx' = F_k \quad (15)$$

setzen, dann sehen wir, daß die $A_k(x)$ Eigenfunktionen entsprechend dem Problem des harmonischen Oszillators mit der Grundfrequenz α sind. Wir erhalten daher beispielsweise für den niedrigsten Energiezustand

$$E_1 = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 F_1 \quad (16)$$

und

$$A_1(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2\right). \quad (17)$$

Mit Hilfe von (15) und (16) finden wir

$$F_1 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad E_1 = \alpha.$$

Es treten auch weiter ausgedehnte angeregte Zustände mit Energien $n\alpha$ auf, wo $n = 2, 3, \dots$ usw. ist. Die entsprechende Lösung der zeitabhängigen Gl. (8) ist daher

$$a(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha x^2 - i\omega t\right).$$

Wir sehen daher, daß das ruhende Teilchen durch ein Gauss-förmiges Paket, das keine Diffusion erleidet, dargestellt werden kann. Der Gauss-förmige Verlauf wird natürlich durch die Wahl von $P(x)$ verursacht. Es erscheint wahrscheinlich, daß im Falle eines allgemeinen $P(x)$ der Auslauf der stationären Lösung in guter Näherung durch den folgenden Ausdruck gegeben werden kann:

$$A(x) \approx \exp\left(-\alpha \int_{x_0}^x \sqrt{2P(x')} dx'\right) \quad \text{für } x \gg L.$$

4. Das freie Teilchen in Translation. Falls $A(x)$ für $V = 0$ eine Lösung von (12) ist, dann ist auch

$$a_v(x, t) = A(x - vt) \exp i(vx - (E + \frac{1}{2} v^2)t) \quad (18)$$

eine Lösung der zeitabhängigen Gleichung. Wenn wir nämlich den obigen Ausdruck in die Gl. (8) einführen und berücksichtigen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x - x') |a_v(x')|^2 dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x - vt - x') |A(x')|^2 dx' = \bar{P}(x - vt),$$

wo

$$\bar{P}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x - x') |A(x')|^2 dx',$$

dann finden wir, daß (18) tatsächlich die Gl. (8) befriedigt, vorausgesetzt daß $A(x)$ die Gl. (12) befriedigt.

Wir sehen also, daß ein bewegtes Teilchen durch ein sich bewegendes Wellenpaket dargestellt werden kann, sehr ähnlich der bekannten Lösung der linearen Gleichung. Der Unterschied zwischen den beiden Lösungen ist, daß im nicht-

linearen Fall die Welle eine endliche Ausdehnung zeigt und an den beiden Enden schnell abklingt. Die soeben besprochene Lösung von (8) ist natürlich nur eine mögliche Lösung. Die allgemeine Lösung des freien Teilchenproblems ist einigermaßen schwierig aufzufinden, da diese Lösung nicht als Linearkombination von Partikularlösungen dargestellt werden kann. Wir betrachten aber in einer qualitativen Weise einen wichtigen Typus der allgemeinen Lösung. Wir gehen von einer Anfangsbedingung, die einem endlichen Paket entspricht, aus und setzen

$$a(x, t) = f(x) \quad \text{für } t = 0,$$

wo $f(x) = 0$ ist für $|x| > \lambda$, wo λ einen festen Wert $\lambda \ll L$ hat. Das nicht-lineare Störungsglied wird daher anfänglich sehr klein sein; für $t = 0$ haben wir z. B.

$$\bar{P}(x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} P(x-x') |f(x')|^2 dx' \leq 2\lambda P(x+\lambda),$$

d. h. für $|x| < \lambda$ ist das Korrektionsglied proportional einem Faktor kleiner als $2\alpha^2 \lambda P(2\lambda)$, der klein ist nach der Definition von $P(x)$. Für $|x| > L$ verschwindet das Korrektionsglied vollständig, da $f(x)$ verschwindet.

Das heißt, falls wir von kleinen Korrekturen absehen, finden wir, daß anfangs das Paket sich in genau derselben Weise bewegt und diffundiert, wie man es nach der linearen Schrödingergleichung erwarten sollte. Die Wirkung des Korrektionsgliedes ist ausschließlich, daß es die Diffusion in größerer Distanz vom Zentrum des Teilchens abschneidet. Der Effekt des nicht-linearen Gliedes wird wesentlich, sobald die gewöhnlich nach der Schrödingergleichung auftretende Diffusion so weit fortgeschritten ist, daß sich das Paket zu einer Größe, die vergleichbar ist mit L , ausgebreitet hat. Nachdem dieser Zustand erreicht ist, verhindert das nicht-lineare Glied weitere Diffusion.

Die analytische Lösung der linearen Schrödingergleichung, die ein sich in Ruhe befindliches Teilchen darstellt, kann z. B. in der folgenden Weise aufgeschrieben werden

$$\Psi(x, t) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b^2 - i t}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2 / (b^2 - i t)\right),$$

daher

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{b^4 + t^2}} \exp(-x^2 b^2 / (b^4 + t^2)).$$

Die Breite dieses Pakets zu einer Zeit t ist also

$$B = \sqrt{b^4 + (t/b)^2}.$$

Wenn also $b \ll L$ ist, d. h. wenn das Paket anfangs viel schmaler ist als L , dann bleibt es schmal im Vergleich zu L , so lange

$$t \ll T, \text{ wo } T = L b m / \hbar.$$

In dieser Zeit schreitet die gewöhnliche Diffusion fort, und sie ist nur wenig durch das Störungsglied beeinflusst. Im Zeitpunkt $t \sim T$ treten die nicht-linearen Kräfte auf und verhindern weitere Diffusion.

5. Teilchen unter Einwirkung eines Potentials. Die Bewegung des Schwerpunktes eines der Gl. (8) genügenden Paketes kann in der bekannten Weise

folgendermaßen erhalten werden. Wir multiplizieren Gl. (8) mit x und ziehen die komplex konjugierte Gleichung ab. Nach Integration über x finden wir

$$\ddot{X} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x |a|^2 dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} a^* a' dx. \quad (19)$$

Im Falle eines stationären Zustandes ist der Ausdruck auf der rechten Seite unabhängig von der Zeit und für diesen Fall haben wir

$$\ddot{X} = -i \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} A^* A' dx = 0.$$

Im Falle eines stationären Zustandes mit reeller Amplitude haben wir $A^* = A'$. Die Integration auf der rechten Seite von (19) kann in diesem Falle ausgeführt werden, und wir finden, daß

$$\dot{X} = 0.$$

Im allgemeinen, nicht-stationären Zustand finden wir ferner, wenn wir (19) nach der Zeit differenzieren

$$\ddot{X} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{a}^* a' + a^* \dot{a}') dx.$$

\dot{a}' kann aus (8) durch Differentiation erhalten werden, und \dot{a}^* aus der zu (8) komplex konjugierten Gleichung, d. h. wir erhalten als Ergebnis einer einfachen Rechnung

$$\ddot{X} = -\frac{\overline{dV}}{dx} - \alpha^2 \frac{\overline{dO}}{dx},$$

wo

$$-\frac{\overline{dV}}{dx} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dV(x)}{dx} |a(x)|^2 dx$$

die mittlere Kraft auf das Teilchen bedeutet, und

$$\frac{\overline{dO}}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial O(x)}{\partial x} |a(x)|^2 dx$$

die Kraft des Teilchens auf sich selbst bedeutet. Die Eigenkraft verschwindet aber genau; wir haben nämlich nach (8)

$$\frac{\partial O(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP(x-x')}{dx} |a(x')|^2 dx,$$

daher

$$\frac{\overline{dO(x)}}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP(x-x')}{dx} |a(x)|^2 |a(x')|^2 dx dx' = 0.$$

Das letztere Integral verschwindet aber, da $\frac{dP(x)}{dx}$ eine ungerade Funktion ist. Die Eigenkraft beeinflusst also nicht die Bewegung des Schwerpunktes und die Beschleunigung des Schwerpunktes wird gegeben durch

$$\ddot{X} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dV(x)}{dx} |a(x)|^2 dx. \quad (20)$$

Wir sehen also, daß genau so wie in der linearen Theorie die Beschleunigung des Schwerpunktes so erfolgt, als ob die wirkende Kraft auf das gesamte Paket ausgedehnt wäre. Der Unterschied zwischen unserem und dem aus der linearen Theorie folgenden Modell ist, daß nach der älteren Auffassung das Paket unter dem Einfluß einer Kraftwirkung sich in zwei oder mehrere Teile spalten konnte und \ddot{X} die Beschleunigung gemittelt über die Beschleunigungen aller Bruchstücke bedeutete; in der nicht-linearen Theorie wird die Größe des Paketes niemals L überschreiten und X bezieht sich auf die Bewegung dieses zusammenhängenden Paketes.

Aus Gl. (20) sehen wir, daß ein Paket sich unter dem Einfluß einer sich langsam verändernden Kraft in guter Näherung so bewegt wie ein klassisches Teilchen; wenn wir nämlich die Änderung von $V(x)$ im Gebiete des Teilchens vernachlässigen, dann haben wir in guter Näherung

$$\ddot{X} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dV}{dx} |a|^2 dx \approx \left(- \frac{dV}{dx} \right)_{x=X}.$$

Die Analogie zur klassischen Theorie ist viel enger in der nicht-linearen Theorie als in der linearen Theorie, da, wie schon erwähnt, in der nicht-linearen Theorie das Teilchen sich nicht spaltet.

6. Zusammenstoß des Teilchens mit einer Potentialwand. Betrachten wir ein Teilchen, das von links her gegen eine Potentialwand, die wesentlich schmaler ist als das Teilchen selbst, anläuft und mit ihr zum Zusammenstoß kommt. Setzen wir z. B. voraus, daß das Teilchen durch

$$|a(x, t)|^2 = \frac{\alpha}{\pi} \exp(-\alpha(x-vt)^2) \quad (21)$$

gegeben sei und daß die Potentialverteilung durch

$$V(x) = V_0 \exp(-\beta x^2) \quad (22)$$

gegeben sei. Wenn wir für den Augenblick die Rückwirkung des Potentials auf die innere Verteilung des Teilchens vernachlässigen, dann können wir Gl. (21) und (22) in Gl. (20) einführen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{X} &\approx \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \exp(-\alpha(x-vt)^2 - \beta x^2) dx \\ &= \frac{\gamma^{1/2} V_0 \exp(-\gamma v^2 t^2)}{\alpha \beta} \end{aligned}$$

mit

$$\gamma = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta}.$$

Im Falle eines abstoßenden Potentials wird die Bewegung des Teilchens verzögert, dann aber wieder beschleunigt, und am Ende bewegt es sich mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit. Die hier benutzte Näherung ist allerdings sehr grob. Wenn wir die Näherung verbessern, indem wir die Störung, die das Paket durch das Potential erleidet, berücksichtigen, dann erhalten wir Wellen, die von der Potentialwand reflektiert worden sind und sich durch das Teilchen bewegen und auf diese Weise Interferenz erzeugen. In dieser Weise wird $|a|^2$ eine komplizierte Funktion, und die gesamte Beschleunigung wird in einer komplizierten Weise oszillieren.

Es ist schwierig zu übersehen, was das Resultat dieser Wechselwirkung in einem einzelnen Falle ist. Es erscheint uns aber wahrscheinlich, obwohl wir dies im Augenblick in keiner Weise beweisen können, daß schließlich das Teilchen entweder durch die Potentialwand durchdringt oder aber von ihr reflektiert wird. Welcher von den zwei Endzuständen sich tatsächlich herausbildet, hängt natürlich von der genauen Anfangsbedingung ab. Es erscheint nicht unwahrscheinlich, daß Pakete, die anfangs sehr ähnlich einander sind, zu verschiedenen Endzuständen führen. Wenn wir dies also annehmen, dann erwarten wir, daß das nicht-lineare Modell in jedem einzelnen Fall zu Reflexion oder Durchgang führt. Wie weit, statistisch untersucht, sich die korrekten Reflexions- und Durchgangswahrscheinlichkeiten ergeben, konnte ich vorläufig nicht entscheiden.

7. Geschlossene stationäre Zustände. Die Lösung der Schrödingerschen Amplituden-Gl. (13) befriedigt auch in guter Näherung die Gl. (12), jedenfalls in dem Gebiet, in dem $|x| \ll L$ ist. Wenn sich der nicht vernachlässigbare Teil der Lösung im wesentlichen in diesem Gebiet befindet, dann können wir erwarten, daß die Energiewerte E_k sich nahe den ungestörten Energiewerten \bar{E}_k befinden. Dies kann qualitativ gezeigt werden durch Überlegungen, die ähnlich denen sind, die wir bei der Besprechung des endlichen Wellenpaketes benützt haben. Es entsprechen aber mehrere Zustände \bar{E}_k , die aus der nicht-linearen Gleichung sich ergeben, einem Zustand E_k , der die lineare Gleichung befriedigt. Das Aufspalten der Zustände im Falle der nicht-linearen Gleichung entspricht inneren angeregten Zuständen des Teilchens. Schematisch können wir die Lösungen der Gl. (12) aus denen der Gl. (13) ableiten, wenn wir das Potential $V(x)$ in die Mitte eines Potentialkastens der Breite $2L$ setzen. Dieser Kasten soll in grober Näherung die Störung des nicht-linearen Gliedes darstellen. Die Lösung der linearen Gleichung klingt exponentiell ab, wenn der Potentialkasten nicht vorausgesetzt wird. Bei Anwesenheit des Kastens muß dagegen die Wellenfunktion an der Wand des Kastens genau verschwinden, d. h. wir müssen zum abklingenden Teil der Wellenfunktion eine schwache Komponente, die eine wachsende exponentielle Funktion besitzt, beimischen so, daß die zwei Komponenten sich am Rande genau aufheben. Ein Annähern an die Grenzrand kann in zwei Weisen geschehen, die zwei ein wenig voneinander verschiedenen Lösungen entsprechen.

Zusammenfassend sehen wir, daß die nicht-lineare Modifikation der Schrödingergleichung Lösungen gibt, die sich nur unwesentlich von den Lösungen der linearen Theorie unterscheiden. Ferner ergibt sich aus der nicht-linearen Theorie, daß sich Teilchen in langsam sich verändernden Feldern im wesentlichen klassisch benehmen. Daher führt die Modifikation bloß zu kleinen Änderungen in einem Gebiet, wo die Ergebnisse der alten Theorie als richtig angesehen werden können. Der neue Zug der nicht-linearen Gleichungen ist aber, daß sie nie zur endgültigen Spaltung eines Wellenpaketes führen.

§ 22. Im letzten Paragraphen haben wir gezeigt, wie man sich eine nicht-lineare Modifikation der Schrödingerschen Gleichung vorstellen kann, bei der die wesentlichen Züge der Wellenmechanik, sofern sie sich auf experimentell geprüfte Tatsachen beziehen, gültig bleiben, die aber Modifikationen zur Folge hat auf Gebieten, wo die Voraussagen der Wellenmechanik experimentell nicht geprüft worden sind und als unverläßlich angesehen werden müssen. Diese Diskussion hat allerdings ihre großen Mängel. In erster Linie konnten wir die Frage nicht beantworten, wie weit diese nicht-lineare Änderung statistisch zu Ergebnissen

führt, die mit den experimentell bestätigten statistischen Aussagen der Wellenmechanik übereinstimmen. Ich beabsichtige, mich mit diesem Problem noch eingehend zu beschäftigen.

Eine weitere große Schwierigkeit unseres Modells ist, daß es ohne weiteres nur auf ein Einteilchen-Problem anwendbar zu sein scheint. Schrödinger gab die Auffassung des verschmierten Elektrons seinerzeit gerade deswegen auf, weil es unmöglich schien, dieses Bild auf das Mehrteilchen-Problem zu übertragen. Wir sind allerdings der Meinung, daß sich diese Schwierigkeit überwinden läßt, falls wir eine klare Unterscheidung zwischen der Wellenfunktion ψ und der von uns eingeführten Amplitude a machen. In dem Beispiel des vorigen Paragraphen haben wir angenommen, daß im Falle eines einfachen Wellenpaketes anfänglich $\psi \approx a$ ist, und dies so lange bestehen bleibt, bis ψ sich nicht über ein zu großes Gebiet ausbreitet. Diese Annahme kann verallgemeinert werden, wenn wir den direkten Zusammenhang zwischen a und ψ völlig fallen lassen und nur von der Annahme ausgehen, daß ein gewisser zeitlicher Mittelwert von a gleich ψ sei. So können wir im Einkörperproblem annehmen, daß

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |a(r, t + \tau)|^2 d\tau = |\psi(r, t)|^2 \quad (23)$$

mit einem nicht zu großen Wert von δ . Wenn wir (23) als richtig voraussetzen, dann können wir weiter verallgemeinern und annehmen, daß im Falle eines Zweikörper-Systems z. B. die folgende Beziehung besteht:

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |a_1(r_1, t + \tau)|^2 |a_2(r_2, t + \tau)|^2 d\tau = |\psi(r_1, r_2, t)|^2, \quad (24)$$

wo a_1 und a_2 die Amplituden zweier Elektronen sind und $\psi(r_1, r_2, t)$ die Schrödingersche Wellenfunktion ist, die den Zustand der zwei Elektronen beschreibt.

Gl. (24) hat vernünftige allgemeine Eigenschaften. Wenn wir z. B. über r_1 oder r_2 integrieren, erhalten wir eine Beziehung vom Typus (23). Die Symmetrie von $|\psi|^2$ verlangt einen gewissen Zusammenhang zwischen a_1 und a_2 , aber dieser Zusammenhang ist schwächer als $a_1(r, t) = a_2(r, t)$. Der Zusammenhang der zwei Amplituden a_1 und a_2 drückt die Wechselwirkung der zwei Elektronen aus.

Diese kleine Skizze, die wir hier gegeben haben, soll nur zeigen, daß es im Prinzip nicht unmöglich erscheint, Schrödingers Bild von dem verschmierten Elektron auf ein Mehrkörperproblem anzuwenden.

Anhang

Wir zeigen im folgenden, daß ein Wellenpaket, dessen Bewegung durch die zeitabhängige Schrödingergleichung beschrieben wird, tatsächlich im Zusammenstoß mit einer Potentialwand sich in zwei Pakete spaltet. Wir betrachten also das eindimensionale Problem und schreiben für die Schrödingergleichung

$$-\frac{1}{2} \psi'' + V(x) \psi = i \dot{\psi}. \quad (25)$$

Die Potentialwand kann in Form einer geeigneten Potentialenergie eingeführt werden. Der Einfachheit halber betrachten wir einen Grenzfall einer unendlich dünnen, unendlich hohen Potentialwand. Der Grenzübergang soll aber so vor sich gehen, daß die Wirkung der Potentialwand endlich ist. Wir setzen die Potential-

wand an der Stelle $x = 0$ voraus. Wir können dann statt (25) das Folgende schreiben

$$-\frac{1}{2}\psi''(x, t) = i\dot{\psi}(x, t) \quad x \neq 0 \quad (26)$$

und

$$\begin{aligned} \psi(-0, t) &= \psi(+0, t) = \psi(0, t) \\ \psi'(+0, t) - \psi'(-0, t) &= \gamma\psi(0, t). \end{aligned} \quad (27)$$

γ ist ein Parameter mit dem positiven Wert, der die Potentialwand charakterisiert. Die Gl. (27) zeigt, daß an der Stelle $x = 0$ ψ kontinuierlich ist, aber seine Ableitung an dieser Stelle eine Unstetigkeit erfährt. Diese Unstetigkeit an der Stelle $x = 0$ ist die Wirkung der Potentialwand. Die Lösung des Gleichungssystems (26) und (27) kann in der folgenden Weise geschrieben werden

$$\psi(x, t) = \Psi'(x, t) - \frac{1}{2}\Delta(x)\gamma(\Psi(x, t) - \Psi(-x, t)), \quad (28)$$

wo $\Psi(x, t)$ eine Lösung der Gl. (25) mit $V(x) \equiv 0$ bedeutet, also

$$-\frac{1}{2}\Psi'''(x, t) = i\dot{\Psi}(x, t) \quad x, t \text{ beliebig} \quad (29)$$

und

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß ψ tatsächlich die Gln. (26) und (27) befriedigt. Als Anfangsbedingung setzen wir nun

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad (31)$$

wo $f(x)$ ein sich auf der negativen x -Achse befindendes Paket darstellt, so daß

$$f(x) = 0 \quad x > 0. \quad (32)$$

Aus der Anfangsbedingung (31) können wir mit Hilfe von (28) zeigen, daß

$$\Psi(x, 0) = -e^{i\gamma x} \int_x^\infty e^{-i\gamma y} f(y) dy, \quad (33)$$

wo (33) jene Lösung darstellt, die für $x = \pm \infty$ verschwindet. Der Verlauf der Funktion Ψ kann aus der Anfangsbedingung (33) eindeutig mit Hilfe der Gl. (29) abgeleitet werden. Dieses Verfahren kann allerdings sehr vereinfacht werden. Wir schreiben $\bar{\psi}(x, t)$ für jene Lösung von (29), die der Anfangsbedingung (31) genügt. In diesem Falle kann man $\Psi(x, t)$ auf die folgende Weise darstellen

$$\Psi(x, t) = -e^{i\gamma x} \int_x^\infty \bar{\psi}(y, t) e^{-i\gamma y} dy. \quad (34)$$

Durch Einsetzen können wir zeigen, daß (34) tatsächlich (29) befriedigt. Wenn nun $\bar{\psi}(x, t)$ tatsächlich die Gl. (32) befriedigt, d. h. falls $\bar{\psi}(x, t)$ auf der positiven x -Achse verschwindet, dann kann $\psi(x, t)$ aus dem $\bar{\psi}(x, t)$ abgeleitet werden mit Hilfe von (24).

Zusammenfassend ergibt sich also folgender Weg. Wir gehen aus von der Wellenfunktion eines freien Paketes $\bar{\psi}(x, t)$. Dieses Paket bewegt sich, als ob an der Stelle $x = 0$ sich keine Potentialwand befände. Von der Funktion $\bar{\psi}$ leiten wir eine Funktion Ψ mit Hilfe von (34) ab. Ferner mit Hilfe von (28) leiten wir aus dem Ψ unsere endgültige Lösung ψ ab. ψ genügt derselben Anfangsbedingung

wie $\bar{\psi}$, aber später unterscheiden sich die Funktion ψ und $\bar{\psi}$, da die Bewegung von ψ durch das Vorhandensein der Potentialwand beeinflusst wird.

Setzen wir nun voraus, daß $\bar{\psi}(x, t)$ ein enges Paket ist, das z. B. durch

$$\bar{\psi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+i\epsilon}} \exp \left\{ -\frac{(x-x_0-vt)^2}{2(1+i\epsilon)} + i \left(vx - \frac{1}{2} v^2 t \right) \right\} \quad (35)$$

gegeben ist, wo $x_0 \ll 0$ die Lage der Koordinate des Pakets zur Zeit $t = 0$ darstellt und wo $v \gg 1$ die Geschwindigkeit des Paketes bedeutet. Wir finden nun mit Hilfe unseres Formalismus, daß für $t \ll -x_0/v$, d. h. bevor der Zusammenstoß stattfindet,

$$\bar{\psi}(x, t) \approx \psi(x, t) \quad \text{für } x < 0$$

$$\bar{\psi}(x, t) \approx 0 \quad \psi(x, t) \approx 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Nach dem Zusammenstoß dagegen finden wir in guter Näherung

$$\psi(x, t) = \Psi'(x, t) \quad \text{für } x > 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \psi(x, t) = \Psi'(x, t) \\ \psi(x, t) = \frac{1}{2} \gamma \Psi(-x, t) \end{matrix}} \right\} t \gg x_0/v. \quad (36)$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \gamma \Psi(-x, t) \quad \text{für } x < 0$$

Wir sehen also, daß $\Psi'(x, t)$ im wesentlichen den durchgehenden Teil des Teilchens, dagegen $\Psi(x, t)$ den reflektierten Teil des Paketes darstellt. Die detaillierte Analyse zeigt, daß beide Pakete qualitativ einander ähnlich sind, d. h. das ursprüngliche Paket spaltet sich in zwei ähnliche Bruchstücke. Wir bemerken noch, daß man aus (36) folgern kann, daß es kein wie immer geartetes Paket geben kann, das im Zusammenstoß mit der Potentialwand sich nicht spalten würde.

Budapest, Zentral-Forschungsinstitut für Physik, Abteilung für kosmische Strahlenforschung.

(Bei der Redaktion eingegangen am 6. August 1952.)

Über das Randschichtrauschen in Halbleitern

Von W. M. Buttler

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Mit Hilfe der Gisolfschen Theorie des Schrotrauschens und der Schottky'schen Randschichttheorie wird durch eine Mittelung über das Quadrat der Feldstärke eine Formel hergeleitet, die unter Zugrundelegung des Gisolfschen Mechanismus das Rauschen in der Randschicht und im Halbleiterinnern in einheitlicher Weise beschreibt.

Einleitung

Fließt in einem Stromkreis der Strom i , so geschieht dieses mit einem mittleren Schwankungsquadrat $\overline{i^2}$. Die Quadratwurzel aus dieser Größe nennt man Rauschstrom.

Als physikalische Ursachen dieser statistischen Schwankungen unterscheidet man im wesentlichen¹⁾:

I. Die statistische Schwankung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Leitungsband. Hierdurch entsteht eine Schwankung der Ladungsdichte und dadurch wiederum eine Wechselladung an den Enden des Halbleiters.

Diese Rauschspannung nennt man Nyquist-Rauschen²⁾.

Es ist seiner Definition nach unabhängig von der Feldstärke aber abhängig von der Temperatur:

$$\overline{i_{Nyq}^2} = 4 k T \Delta\nu / R$$

k = Boltzmann-Faktor $\Delta\nu$ = Beobachtungsintervall
 T = Abs. Temperatur R = Widerstand.

II. Die statistische Schwankung der Zahl der Leitungselektronen, die durch Elektronenübergänge von leitenden in nichtleitende Zustände und durch solche in umgekehrter Richtung hervorgerufen wird. Diese Schwankungen berechnet Gisolff³⁾ zu

$$\overline{i^2} = \frac{(e b n Q)^2}{\pi n L Q} F^2 \int_{\pi \tau \nu_1}^{\pi \tau \nu_2} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right)^2 d\zeta \quad (1)$$

e = Elementarladung

Q = Querschnitt des Halbleiters

b = Beweglichkeit

F = Feldstärke

n = Elektronenkonzentration τ = mittlere Lebensdauer der Elektronen

L = Länge des Halbleiters $\nu_2 - \nu_1$ = Lage und Breite des Beobachtungsintervalls der Rauschfrequenz.

¹⁾ Vgl. P. Görlich, Die Photozellen, S. 228ff.

²⁾ H. Nyquist, Physic. Rev. 32, 110, 753 (1928).

³⁾ J. H. Gisolff, Physica 15, 825 (1949).

III. Der Einfluß der Randschicht, die sich nach Schottky⁴⁾ infolge eines von Null verschiedenen Diffusionspotentials des Metall-Halbleiter-Kontaktes ausbildet.

IV. Bei Photohalbleitern die statistische Schwankung der eingestrahlten Lichtquanten⁵⁾, die eine Schwankung der Elektronenkonzentration im Leitungsband zur Folge hat.

Die Gisolfsche Theorie zeichnet sich in ganz besonderem Maße dadurch aus, daß sie physikalisch saubere und plausible Voraussetzungen macht, indem sie der Bänderstruktur des festen Körpers Rechnung trägt und nur mit den in der Theorie der Kristalle üblichen Begriffen⁶⁾ operiert. Die bestehenden Theorien des Randschichtrauschens⁷⁾ dagegen gehen nach unserer Ansicht von vielleicht zu speziellen Modellen aus und gewähren, soweit wir sehen können, keinen rechten Einblick in die physikalischen Ursachen des Randschichtrauschens.

Wie die Erfahrung zeigt, kann bei nicht zu kleinen Strömen der Effekt III um Zehnerpotenzen größer sein als der Effekt II und dieser wieder um Zehnerpotenzen größer als die Effekte I und IV.

Die Berechnung des mittleren Rauschstromquadrates¹⁾

Wir wollen nun versuchen, eine Methode zu entwickeln, die es gestattet, mit Hilfe der Gisolfschen Voraussetzungen sowohl das Rauschen in der Randschicht (III) als auch das Rauschen im Halbleiterinnern (II) zu beschreiben.

Gl. (1) wird allgemein verwendet, indem man $(ebnQ)^2(F)^2$ mit dem makroskopisch meßbaren Quadrat i^2 des Stromes identifiziert und etwa für das Beispiel eines Breitbandverstärkers ($v_1 \rightarrow 0$; $v_2 \rightarrow \infty$) den Wert $(\pi/2)$ des Integrals einsetzt.

$$(1) \rightarrow i^2 = i^2/2 n L Q. \quad (2)$$

Dieser Übergang von Gl. (1) zu Gl. (2) geschieht offenbar unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß das Quadrat der Feldstärke (F^2) als Funktion von x (Bei $x = 0$ beginnt der Kristall) über den ganzen Festkörper konstant ist. Das ist aber, wie die grundlegenden Schottkyschen Arbeiten zur Theorie der Randschicht gezeigt haben, im allgemeinen keineswegs erfüllt. Vielmehr treten beispielsweise beim reinen Überschußhalbleiter infolge der Randverarmung an Elektronen im Kathodenraum starke Änderungen des Potentials, also erst recht starke Änderungen des Quadrates des Potentialgradienten auf.

Für alles Folgende nehmen wir an, daß Gl. (1) an jeder Stelle x im Kristall richtig ist. Wenn wir Rauschmessungen an Widerständen durchführen, so messen wir nicht das durch Gl. (1) gelieferte von x abhängige Rauschstromquadrat $i^2(x)$, sondern den Mittelwert dieser Größe hinsichtlich x . Wir müssen also den Verlauf der Feldstärke bestimmen und das Quadrat dieser Größe über x mitteln. Dies soll nun für das Beispiel des reinen Elektronenleiters versucht werden.

⁴⁾ W. Schottky, Z. Physik 118, 539 (1942).

⁵⁾ W. B. Lewis, Proc. phys. Soc. 59, 34 (1947).

⁶⁾ Vgl. hierzu etwa H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle oder F. Seitz, The Modern Theory of Solids.

⁷⁾ H. F. Mataré, Z. Naturforschg. 4a, 275—283 (1949); G. Macfarlane, Proc. phys. Soc. 59, 366 (1947); Philos. Mag. 7, 188 (1949); 8, 807 (1950).

Dabei ist der Gang der Rechnung folgender:

Wir berechnen nach dem Vorbild von Schottky und Spenke^{a)} die Feldstärke $F(x)$ im Halbleiter, indem wir aber einem Vorschlag von Bethe^{b)} folgend noch den Einfluß der Bildkraft berücksichtigen. Nachdem dieses geschehen ist, bleibt dann nur noch die Mittelung von $F^2(x)$ zu tun, die wir als den wesentlichen Punkt unserer Deutung des Rauschens ansehen.

Eine Punktladung $-e$ ($e = |e|$) im Material der D.K. ϵ im Abstand x von einer Metalloberfläche befindet sich nach der klassischen Elektrostatik im elektrischen Feld der Bildkraft

$$F_b = + e/4\epsilon x^2, \quad a \leq x \leq L. \quad (3)$$

Hierbei ist a eine Größe, die die Gültigkeitsgrenze des Coulombschen Gesetzes angibt, d. h. also eine Zahl in der Größenordnung der Gitterkonstanten des verwendeten Elektrodenmaterials. L ist wie immer die Länge des Halbleiters.

Photoelektrisch oder thermisch möge nun in dem Halbleiter eine bestimmte mittlere Zahl n_D von positiv ionisierten Zentren pro cm^3 entstehen. Damit werden gleichzeitig freie Elektronen im Leitungsband erzeugt, deren Konzentration wir $n(x)$ nennen. Weiterhin wird ein bestimmter Teil der Haftstellen mit Elektronen besetzt, deren Konzentration wir n_H nennen. Dann gilt

$$\varrho(x) \equiv e[n_D - n(x) - n_H] \quad (4)$$

den Verlauf der Ladungsdichte im Kristall an. Nun sei l per definitionem derjenige Abstand von der Kathode, für den näherungsweise gilt (die Kathode ist bei $x = 0$)

$$\varrho(x) \equiv 0, \quad l \leq x \leq L; \quad (5)$$

$$\varrho(x) \equiv e n_D \equiv \text{const.}, \quad a \leq x \leq l; \quad (6)$$

d. h., wir machen mit Spenke die Annahme, daß im Innern des Halbleiters $\langle l, L \rangle$ Quasineutralität herrscht [$n_H + n(x) = n_D$] und daß in der Randschicht $\langle a, l \rangle$ bei Annäherung vom quasineutralen Halbleiterinnern die Elektronenkonzentration im Leitungsband und in den Haftstellen schon so stark abgesunken ist, daß sie gegen n_D vernachlässigt werden kann. Somit gewinnen wir aus der Poissonschen Gleichung

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi}{\epsilon} \varrho(x) \quad (7)$$

als erstes Integral mit Rücksicht auf die Gl. (6) und (3) die Feldstärke in der Randschicht

$$F_R(x) = \frac{4\pi}{\epsilon} e n_D (x-l) + \frac{e}{4\epsilon x^2} + \text{const.}, \quad a \leq x \leq l. \quad (8)$$

Ebenso erhalten wir die Feldstärke im Innern nach (7), (5) und (3)

$$F_I(x) = F_H + \frac{e}{4\epsilon x^2}, \quad l \leq x \leq L. \quad (9)$$

^{a)} E. Spenke, Z. Physik 126, 67 (1949).

^{b)} H. A. Bethe, RL-Report No. 43-12, Nov. 23 (1942).

Da die Bildkraft im Innern keine Rolle mehr spielt, können wir sagen, F_H ist die konstante Bahnfeldstärke, die die örtlich konstante Stromdichte i/Q durch den Halbleiter treibt:

$$i = -(e b n Q) F_H \quad (10)$$

const. in (8) muß gleich F_H sein, da $F_R(l) = F_I(l)$ zu fordern ist. Also

$$F_R'(x) = \frac{4\pi}{\epsilon} e n_D (x-l) + F_H + \frac{e}{4\epsilon x^2}, \quad a \leq x \leq l; \quad (11)$$

$$F_I(x) = F_H + \frac{e}{4\epsilon x^2}, \quad l \leq x \leq L. \quad (12)$$

Das Potential gewinnen wir als nächstes Integral

$$\varphi_R(x) = -\frac{2\pi e n_D}{\epsilon} (x-l)^2 - F_H x + \frac{e}{2\epsilon x}, \quad a \leq x \leq l; \quad (13)$$

$$\varphi_I(x) = -F_H x + \frac{e}{2\epsilon x}, \quad l \leq x \leq L. \quad (14)$$

Im nächsten Bild sehen wir den Verlauf des Potentials und des Quadrates seines Gradienten schematisch; aus dieser Darstellung erhält man ein anschauliches Bild von der Entstehung des Randschichtrauschens.

Wir nehmen an, daß der Spannungsbedarf der Anode gegen die Saugspannung U_- (das ist die Potentialdifferenz der Metallelektroden) vernachlässigbar ist und daß immer gilt:

$$L \geq l \gg a. \quad (15)$$

Somit wird, da das Linienintegral der Feldstärke über den ganzen Stromkreis verschwinden muß, nach Gl. (13) und (14)

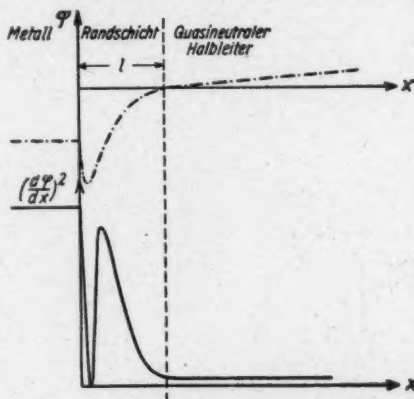


Abb. 1. Verlauf von Potential und [Feldstärke]²

$$U_- = -F_H L - \frac{e}{2\epsilon a} + \frac{2\pi e n_D}{\epsilon} l^2,$$

oder

$$\frac{2\pi e n_D}{\epsilon} l^2 = \frac{e}{2\epsilon a} + U_- + F_H L, \quad (16)$$

oder

$$l = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi e n_D}} \sqrt{\frac{e}{2\epsilon a} + U_- + F_H L}. \quad (17)$$

Nach Definition des Mittelwertes ist

$$L \overline{F^2}(x) = \int_a^L F^2(x) dx = \int_a^l F_R^2(x) dx + \int_l^L F_I^2(x) dx.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Gl. (11) und (12) ein, so erhalten wir mit (15)

$$L \bar{F}^2 = L F_H^2 + \frac{1}{3a} \left(\frac{e}{4\epsilon a} \right)^2 - 2 F_H \left\{ \frac{-e}{4\epsilon a} + \frac{2\pi e n_D}{\epsilon} \right\} + 4l \frac{2\pi e n_D}{\epsilon} \left\{ \frac{-e}{4\epsilon a} + \frac{2\pi e n_D}{\epsilon} \right\}. \quad (18)$$

Dividieren wir (18) durch F_H^2 und setzen auf der rechten Seite (16) und (17) ein, so folgt

$$\frac{\bar{F}^2}{F_H^2} = 1 + \frac{1}{L F_H^2} \left\{ \frac{1}{3a} \left(\frac{e}{4\epsilon a} \right)^2 + 2 |F_H| \left(\frac{e}{4\epsilon a} + U_- - |F_H| L \right) + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi e n_D}{\epsilon}} \sqrt{\frac{e}{2\epsilon a} + U_- - |F_H| L} \left(\frac{-e}{4\epsilon a} + U_- - |F_H| L \right) \right\}. \quad (19)$$

Jetzt mitteln wir Gl. (1) über x , tragen in die so gemittelte Gleichung die Gl. (10) und (19) ein, um endgültig zu erhalten:

$$\bar{i}^2 = \frac{i^2}{\pi n L Q} \cdot \int_{\pi \tau \tau_1}^{\pi \tau \tau_2} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right)^2 d\zeta \cdot \left[1 + \frac{1}{L F_H^2} \left\{ \frac{1}{3a} \left(\frac{e}{4\epsilon a} \right)^2 + 2 |F_H| \left(\frac{e}{4\epsilon a} + U_- - |F_H| L \right) + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi e n_D}{\epsilon}} \sqrt{\frac{e}{2\epsilon a} + U_- - |F_H| L} \left(\frac{-e}{4\epsilon a} + U_- - |F_H| L \right) \right\} \right]. \quad (20)$$

Diskussion

Durch Gl. (20) haben wir also eine Formel erhalten, die in der Tat das Rauschen im gesamten Halbleiter in einheitlicher Weise beschreibt. Zu der 1 in der eckigen Klammer, die den Gisolfschen Anteil des Rauschens bestimmt, kommt also noch ein zweiter durch die Randschicht verursachter hinzu, der von der Kristallgeometrie, -charakteristik und den Konzentrationen n und n_D abhängt, und der, wie man überschlägt, durchaus groß gegen 1 sein kann. Auf der rechten Seite von Gl. (20) lassen sich alle vorkommenden Größen bis auf die Donatorenkonzentration n_D experimentell bestimmen. Wenn man also an einem Halbleiter gleichzeitig Photostrom, Rauschstrom, Saugspannung, Bahnfeldstärke und die Elektronenkonzentration mißt, so kann man mit Hilfe von Gl. (20) die Konzentration n_D der positiv geladenen Zentren berechnen. Für den Fall, daß diese gleich der Elektronenkonzentration ist, kann man letztere direkt ohne Halleffektmessungen aus Rauschstrommessungen gemäß Gl. (20) bestimmen.

Abschließend wollen wir noch unser Augenmerk auf einige Punkte richten, die wir aus mathematischen Gründen, d. h. um einen geschlossenen analytischen Ausdruck für den Rauschstrom zu erhalten, nicht berücksichtigt haben:

1. Der Spannungsbedarf der Anode ist bei solchen Saugspannungen, die in der Größenordnung der Diffusionsspannung liegen, sicherlich nicht vernachlässigbar. Bei diesen Spannungen sollten sich also stärkere Abweichungen vom Experiment ergeben.

2. Die mittlere Konzentration der positiv ionisierten Zentren im quasineutralen Halbleiterinnern ist in der Randschicht nicht konstant, sondern sie wird zum Rande hin zunehmen, einfach dadurch, daß in der Randschicht die energetische

Lage der positiven Zentren sich mit den Bändern verbiegt und über die Fermi-
kante des Halbleiters rutscht.

3. Potentialverlauf und Elektronenkonzentration bedingen sich gegenseitig,
so daß man die Poissonsche Gleichung simultan mit der Differentialgleichung
für die Elektronenkonzentration integrieren müßte, die man dadurch erhält, daß
Diffusions- und Feldstrom sich an jeder Stelle x im Halbleiter zu dem konstanten
Strom i ergänzen.

4. Der Halbleiter ist unter Umständen amphoter.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß Gl. (20) bei entsprechender
Umdeutung der vorkommenden Größen ebenso für den reinen Defektleiter gilt.

Herrn Prof. Dr. Möglich, sowie Herrn Dr. Faßbender bin ich für wert-
volle Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung.

(Bei der Redaktion eingegangen am 12. September 1952.)

Über das Randschichtrauschen von CdS-Einkristallen

Von W. M. Buttler

(Mit 6 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird eine neue Theorie des Randschichtrauschens, die auf der Basis der Schottkyschen Randschichttheorie und der Gisolfschen Theorie des Schrottrauschens in Halbleitern entwickelt wurde, am CdS experimentell hinsichtlich der Spannungsabhängigkeit des Rauschstromes geprüft und der Nachweis erbracht, daß beim CdS der Rausch vorzüglich der Randschicht entstammt.

Einleitung

An den Enden jedes elektronischen Leiters treten bei endlichen Temperaturen Potentialschwankungen auf, die durch statistische Schwankungen der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen verursacht werden. Wegen der großen Bedeutung dieser Erscheinung in der Verstärkertechnik wird der Effekt allgemein als Rauschen bezeichnet.

Nyquist¹⁾ fand für das Quadrat des Rauschstromes

$$\overline{i_{Nyq}^2} = 4 k T \Delta\nu / R$$

$\overline{i_{Nyq}^2}$ = Rauschstromquadrat

$\Delta\nu$ = Frequenzbreite des Beobachtungsintervalls

k = Boltzmann-Faktor

R = Widerstand.

T = Absolute Temperatur

Diese Formel ist sicher richtig, solange es sich um metallische Leiter handelt. Bei Halbleitern dagegen liegen die Dinge viel komplizierter, da man an ihnen Rauschströme messen kann, die das Nyquist-Rauschen unter Umständen um viele Zehnerpotenzen übersteigen. Beim Halbleiter gibt es also noch andere physikalische Ursachen, die eine Schwankung des Stromes zur Folge haben. Das totale Differential des Ohmschen Gesetzes

$$d(i/Q) = e n dv + e v dn$$

i = Stromstärke

e = Ladung der Ladungsträger

Q = Querschnitt des Leiters bzw. Halbleiters

n = Konzentration der Ladungsträger
 v = Geschwindigkeit der Ladungsträger

läßt erkennen, daß zu dem Term mit dv , der zum Nyquist-Rauschen führt, noch ein zweiter hinzukommt, der bei Halbleitern nicht vernachlässigt werden kann, da hier die räumlich gemittelte Ladungsträgerkonzentration noch starke

¹⁾ H. Nyquist, Physic. Rev. 32, 110, 753 (1928).

zeitliche Schwankungen erfahren kann, die unter Umständen groß sind gegen diejenigen des thermischen Nyquist-Rauschens.

Als Ursachen für diese zweite Gruppe von Schwankungen unterscheidet man im wesentlichen:

I. Die statistische Verteilung der Ladungsträger über die leitenden und nicht-leitenden Zustände²⁾.

II. Die Randschicht³⁾, die sich nach Schottky⁴⁾ infolge eines von Null verschiedenen Diffusionspotentials ausbildet.

III. Bei Photohalbleitern die statistische Schwankung der eingestrahlenen Lichtquanten.

Der Effekt II ist häufig groß gegen den Effekt I und dieser wiederum groß gegen das Nyquist-Rauschen und den Effekt III.

In dieser Arbeit soll nun versucht werden, am Beispiel des CdS eine neue Theorie⁵⁾ des Randschichtrauschens experimentell zu prüfen. Die Theorie berechnet das Rauschen einer Schottkyschen Randschicht mit Hilfe der von Gisolf entwickelten Modellvorstellungen des Halbleiterrauschens. Man erhält⁶⁾

$$\begin{aligned} \overline{i^2} = & \frac{\overline{i^2}}{\pi n L Q} \int_{\pi \tau \nu_1}^{\pi \tau \nu_2} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right)^2 d\zeta \left[1 + \frac{1}{L |F_H|^2} \left\{ \frac{1}{3 a} \left(\frac{e}{4 \varepsilon a} \right)^2 \right. \right. \\ & + 2 |F_H| \left(\frac{e}{4 \varepsilon a} + U - |F_H| L \right) \\ & \left. \left. + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2 \pi e n_D}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{e}{2 \varepsilon a} + U - |F_H| L} \left(\frac{e}{4 \varepsilon a} + U - |F_H| L \right) \right\} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

$|F_H| = |i / e b n Q|$ ist die konstante Bahnfeldstärke, die den Strom i durch das quasineutrale Halbleiterinnere treibt.

Weiter bedeuten im absoluten elektrostatischen Maßsystem:

- ν_1 = Frequenzlage des Beobachtungsintervalls
- $\nu_2 - \nu_1$ = Breite des Beobachtungsintervalls
- τ = mittlere Lebensdauer der Elektronen im Leitungsband
- i = Strom
- $\overline{i^2}$ = Rauschstrom
- n = Elektronenkonzentration im Leitungsband
- n_D = Konzentration der positiv ionisierten Donatoren
- $L Q$ = Volumen des Halbleiters
- b = Elektronenbeweglichkeit
- a = Gitterkonstante des Elektrodenmaterials
- U = Potentialdifferenz der Elektroden
- e = Elementarladung
- ε = D. K. des Halbleiters.

Aus der Formel entnimmt man, daß das Randschichtrauschen um so stärker ist, je kleiner die Länge L des Halbleiters ist. Demzufolge wurden also Kristalle mit Spaltbreiten von ungefähr einem halben Millimeter untersucht. Die Kristalle werden nach einem dem von Frerichs angegebenen ähnlichen Verfahren⁶⁾ im hiesigen Institut hergestellt.

²⁾ J. H. Gisolf, *Physica* 15, 825 (1949).

³⁾ H. F. Metaré, *Z. Naturforsch.* 4a, 275–283 (1949). G. MacFarlane, *Proc. phys. Soc.* 59, 366 (1947); *Philos. Mag.* 7, 188 (1949); 8, 807 (1950).

⁴⁾ W. Schottky, *Z. Physik* 118, 539 (1942).

⁵⁾ W. M. Buttler, *Ann. Physik* (6) 11, 362 (1953).

⁶⁾ J. Faßbender, *Ann. Physik* (6) 5, 33 (1950).

Versuchsanordnung

Zur Messung von Rausch- und Photostrom wurde im Schema folgende Apparatur benutzt:

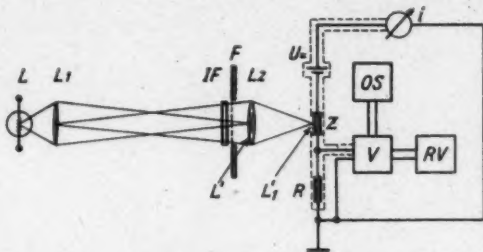


Abb. 1. Meßanordnung

Als Optik wurde im Prinzip die Köhlersche Anordnung verwendet. Dabei dient als Lichtquelle eine 200-W-Doppelwendellampe. Zur Intensitätsschwächung wurde das Filtrerrad F benutzt, das auf seiner Peripherie Drahtsiebe verschiedener Maschenweite besaß. Das Licht wurde durch ein Jenaer Metallinterferenzfilter IF monochromatisch gemacht. Als Arbeitswiderstand R wurde $1\text{ k}\Omega$ gewählt, d. h. ein Widerstand, der sowohl klein ist gegen den Zellenwiderstand bei stärkster Belichtung (etwa $100\text{ k}\Omega$), als auch klein gegen den Eingangswiderstand des Verstärkers ($1\text{ M}\Omega$). Als Verstärker wurde ein eichbarer Meßverstärker verwendet, mit dem sich Rauschströme von 10^{-8} A gerade noch messen ließen. Der Frequenzbereich betrug 100 kHz . Es wurde nur das integrale Rauschen untersucht. Bei der Durchführung der Messung ist vor allen Dingen darauf zu achten, daß die Betriebsspannung der Lichtquelle sehr gut konstant ist (die Schwankungen müssen kleiner als 10^{-3} sein), da die sonst auftretende Intensitätsmodulation des eingestrahlten Lichtes eine Ablesung der Rauschspannung auf dem Röhrenvoltmeter unmöglich macht und daß die in der Schaltung eingezeichneten Teile der Apparatur mit ferromagnetischem Metall gegen elektromagnetische Einstreuungen abgeschirmt sind.

Meßergebnisse

Die untersuchten Kristalle wurden vor Beginn der Messung zwei Stunden im Hochvakuum bei 300°C ausgeheizt. Danach wurden die Rauschmessungen ausgeführt, und zwar wurde einmal mit der blauen Hg-Linie (4358 \AA), d. h. im Gebiet der Grundgitterabsorption, und zum anderen mit der grünen Hg-Linie (5461 \AA), d. h. im Ausläufergebiet des CdS, eingestrahlt. Danach wurden dieselben Zellen in trockener Luft bei 350°C und Atmosphärendruck eine halbe Stunde lang getempert. Bei dieser Temperatur diffundiert der Sauerstoff in den Kristall und verursacht eine reversible Veränderung der Störstellenkonzentration, wie bisher noch unveröffentlichte Untersuchungen von Muscheid (Institut für Festkörperforschung dDAW, Berlin-Buch) gezeigt haben. Nun wurden die Zellen bei dem herrschenden Atmosphärendruck wieder auf Zimmertemperatur abgekühlt. Dabei wird dann der durch den Sauerstoffeinbau veränderte Störstellengehalt eingefroren. Der nicht in den Kristall diffundierte Sauerstoff wurde dann bei Zimmertemperatur wieder abgepumpt. An den so behandelten Zellen wurden

nun wiederum Rauschmessungen bei Einstrahlung der blauen bzw. grünen Hg-Linie angestellt. Es wurden drei Zellen durchgemessen, die dasselbe Verhalten zeigten, wenn man von kleineren Parallelverschiebungen absieht. Verlauf und gegenseitige Lage der Meßkurven waren also immer gleich. Im folgenden wird eine Auswahl von Kurven gezeigt, die alle an demselben Exemplar gemessen wurden. Die Dimensionen dieses Kristalls waren

$$L = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}; Q = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2; LQ = 3,96 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3. \quad (2)$$

Abb. 2 zeigt als Beispiel den Rauschstrom über der angelegten Saugspannung mit der relativen Belichtungsintensität I als Parameter.

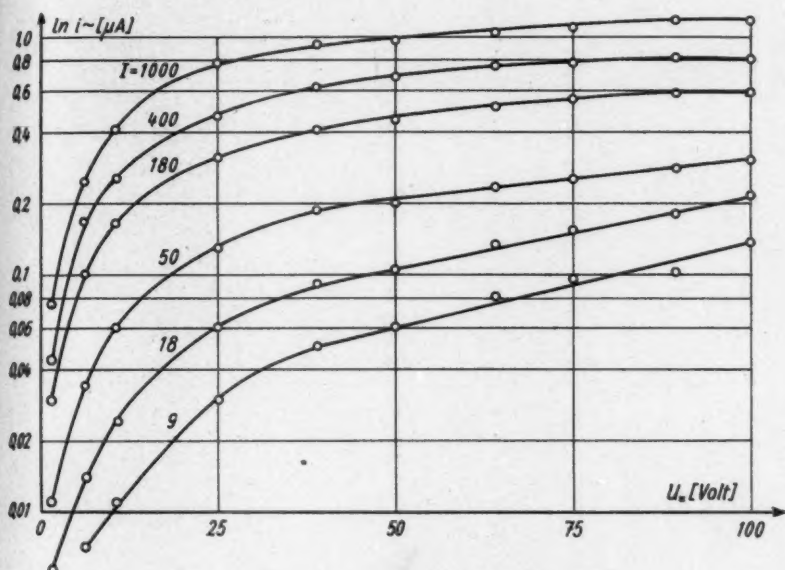


Abb. 2. Anregung mit 4358 Å nach Tempeln in Luft

Diskussion

Zunächst läßt schon eine einfache größenordnungsmäßige Abschätzung der zu erwartenden Rauschströme erkennen, daß die gemessenen Rauschströme nicht dem Halbleiterinnern entstammen können. Bei unendlicher Bandbreite des Verstärkers ($\nu_1 \rightarrow 0, \nu_2 \rightarrow \infty$) hat das Integral in Gl. (1) einfach den Wert $\pi/2$. Ist nun der zweite Summand in der eckigen Klammer der Gl. (1) klein gegen eins, d. h. entstammt das Rauschen überwiegend dem Halbleiterinnern, so wird

$$\left(\frac{i}{i_0}\right)^2 = \frac{1}{2\pi LQ}. \quad (3)$$

Bei konstanter Konzentration, d. h. bei konstanter Belichtungsintensität sollte dieser Quotient konstant, im besonderen also spannungsunabhängig sein; das ist aber, wie Abb. 3 zeigt, keineswegs der Fall.

Experimentell findet man, daß bei den verwendeten Lichtintensitäten und Saugspannungen das Quadrat des relativen Rauschstroms bei dem gemessenen Kristall immer zwischen

$$2 \cdot 10^{-4} \leq \left(\frac{\tilde{i}}{i}\right)^2 \leq 2,5 \cdot 10^{-2}$$

liegt. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gln. (2) und (3)

$$5 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3} \leq n \leq 6 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}.$$

Aus den gemessenen Werten für Photostrom und Saugspannung und unter der Annahme einer größenordnungsmäßig sicher richtigen Beweglichkeit von $100 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ überschlägt man, daß die wirklichen Elektronenkonzentrationen um 6 bis

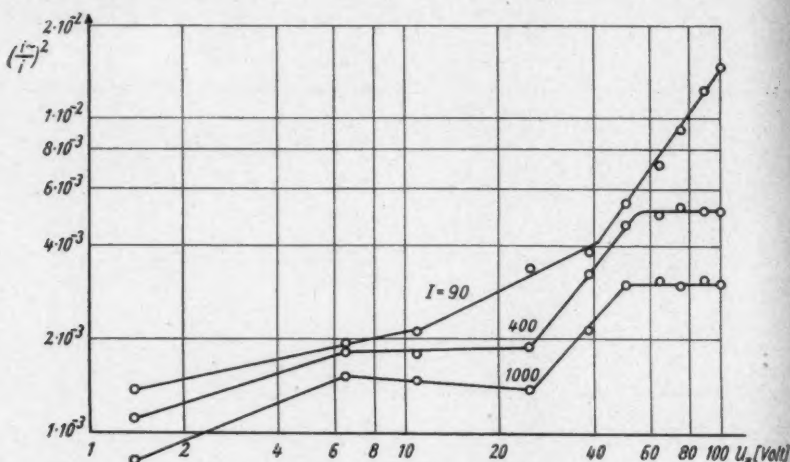


Abb. 3. Anregung mit 4358 Å

8 Zehnerpotenzen größer sind. Das bedeutet aber wiederum nach Gl. (3), daß das auf den fließenden Photostrom bezogene Gisolfsche Rauschen um $\sqrt{6}$ bis $\sqrt{8}$ Zehnerpotenzen kleiner ist als das gemessene. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß das im vorliegenden Fall gemessene Rauschen von der Randschicht herrührt.

In Gl. (1) geht außer den experimentell gemessenen Größen i , \tilde{i} , U_m , L und Q noch die Elektronenkonzentration, die Donatorenkonzentration und die Elektronenbeweglichkeit ein. Die Beweglichkeit ist aus anderweitigen Messungen bekannt und beträgt etwa $100 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$. Ferner sei angenommen, daß im quasineutralen Halbleiterinnern die Konzentration der Leitungselektronen und der positiv geladenen Zentren einander gleich sind, d. h. die Konzentration der besetzten Haftstellen soll klein sein gegenüber der Konzentration der Leitungselektronen. Dann enthält die Gl. (1) nur noch einen frei wählbaren Parameter, nämlich die Konzentration, um theoretische und gemessene Kurve aneinander anzupassen.

Abb. 4 und 5 zeigen Rauschstrom-Saugspannungs-Charakteristiken des gleichen Kristalls bei zwei bzw. drei Bestrahlungsintensitäten mit und ohne Sauerstoff.

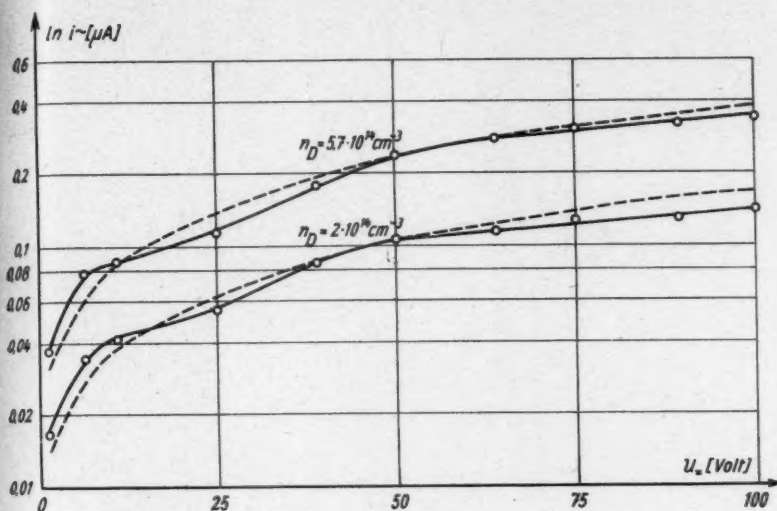


Abb. 4 a. Anregung mit 4358 Å

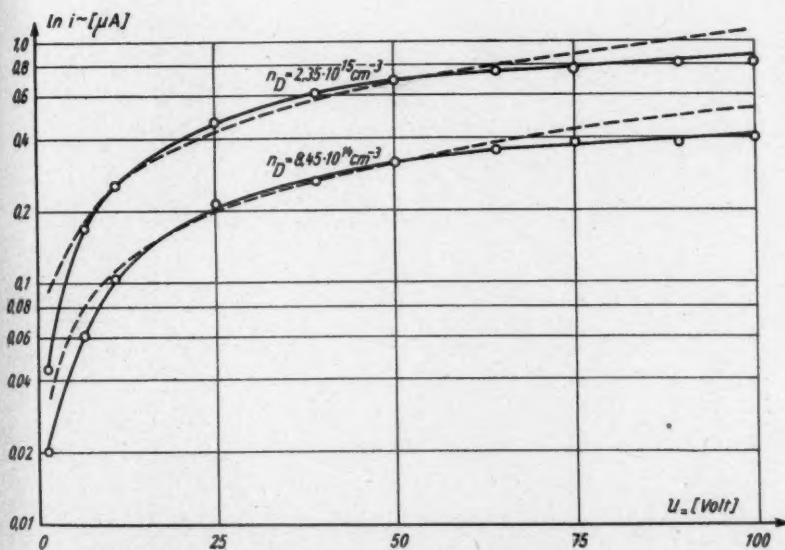


Abb. 4 b. Anregung mit 4358 Å nach Tempern in Luft

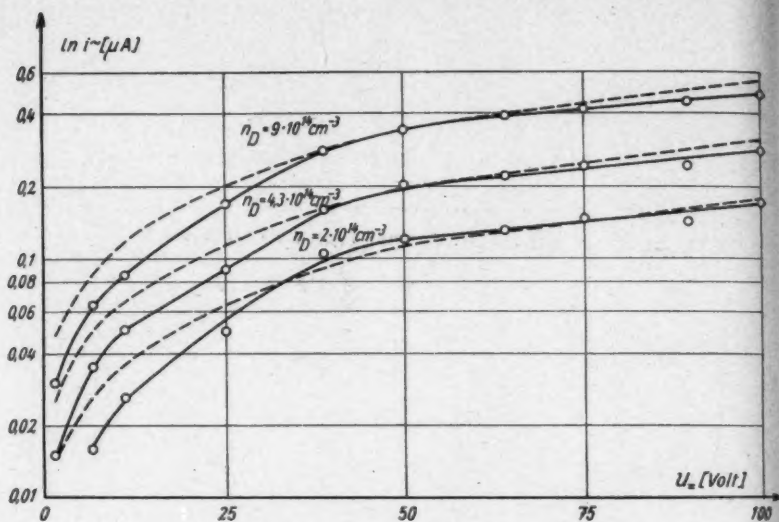


Abb. 5 a. Anregung mit 5461 Å

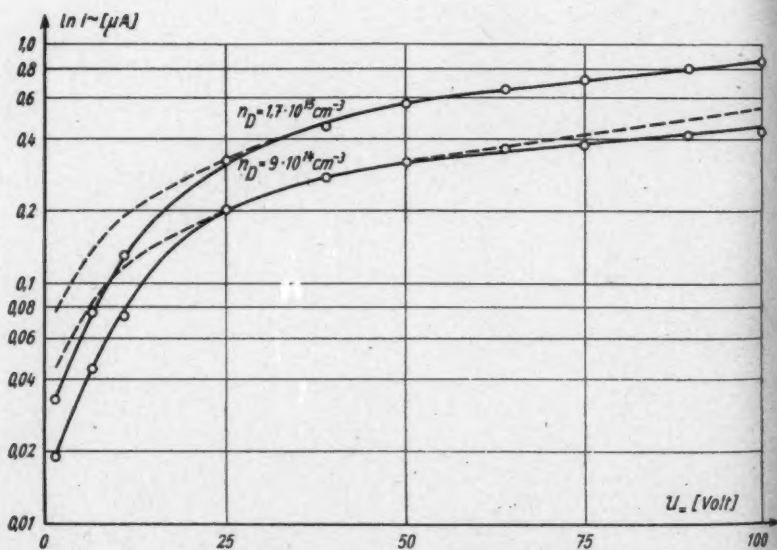


Abb. 5 b. Anregung mit 5461 Å nach Tempern in Luft

Die gestrichelten Kurven sind die theoretischen Kurven, die bei mittleren Spannungen (40–50 V) angepaßt wurden.

Man sieht zunächst, daß der Kurvenverlauf richtig wiedergegeben wird. Größere Abweichungen treten nur bei kleineren Spannungen aus den schon erwähnten Gründen auf⁷⁾. Ob im Grundgittergebiet oder in die Ausläuferabsorption eingestrahlt wird, ist ohne wesentlichen Einfluß auf die Form der Charakteristiken. Auch der Ein- und Ausbau von Sauerstoff ruft lediglich eine geringfügige Veränderung der Kurvenform und der absoluten Größe des Rauschens hervor. Daraus läßt sich entnehmen, daß Schwankungen der Konzentration der freien

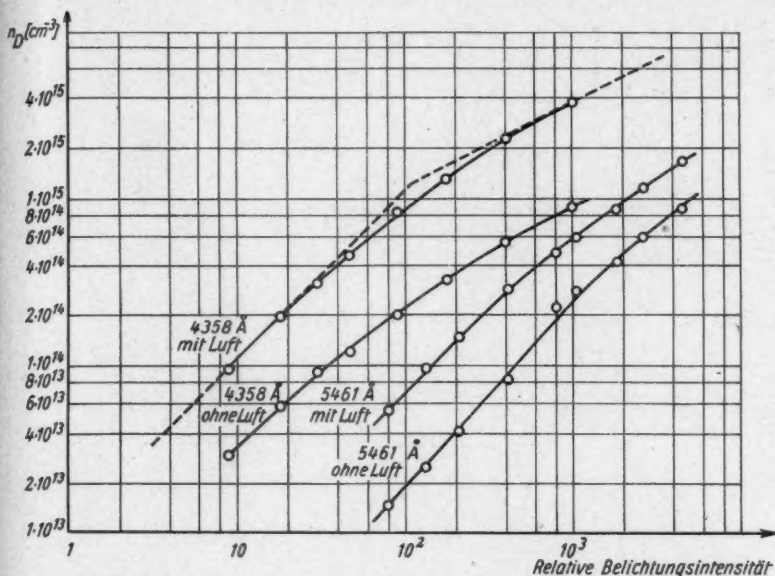


Abb. 6. Abhängigkeit der berechneten Konzentration n_D von der Lichtintensität

Elektronen, die durch Anlagerung an die Haftstellen und Wiederablösung hervorgerufen werden, zum Rauschen im vorliegenden Falle nur wenig beitragen. Von Messungen der Temperaturabhängigkeit der Dunkelleitfähigkeit⁷⁾ ist nämlich bekannt, daß sich die Besetzungsverhältnisse der flachgelegenen Haftstellen durch den Einbau von Sauerstoff um Größenordnungen ändern lassen.

Da die Elektronenkonzentration der einzige freie Parameter in Gl. (1) ist, läßt sich das Rauschen zur Konzentrationsbestimmung verwenden. Die so gefundenen Konzentrationen stimmen größenordnungsmäßig mit den Werten überein, die man aus den gemessenen Werten für Photostrom und Saugspannung bei bekannter Beweglichkeit errechnet. Eine bessere Übereinstimmung ist auch nicht zu erwarten, da das in Gl. (1) eingehende n_D auf komplizierte Weise aus der Elektronen- und Donatorenkonzentration gemittelt wird. Aus dieser Tatsache sowie

⁷⁾ W. Muscheid, noch nicht veröffentlicht.

aus der relativ guten Übereinstimmung der gerechneten mit der gemessenen Charakteristik läßt sich der Schluß ziehen, daß im vorliegenden Falle das Rauschen fast ausschließlich von der Randschicht herrührt und durch den großen Potentialgradienten in der Randschicht verursacht wird.

Man kann nun versuchen, die Bestimmung der Elektronenkonzentration aus dem Rauschen dazu zu benutzen, um die Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Bestrahlungsstärke zu berechnen. Das Ergebnis zeigt Abb. 6. Bei Einstrahlung im Grünen findet man einen linearen Zusammenhang zwischen Konzentration und Bestrahlungsstärke, bei Einstrahlung im Blauen eine gekrümmte Kurve, mit den asymptotischen Steigungen 1 bzw. $\frac{1}{2}$, wie man sie unter Zugrundelegung eines gemischten Rekombinationsmechanismus erhält⁴⁾. Der Ein- und Ausbau von Sauerstoff bewirkt eine Veränderung der Konzentrationen bei gleicher Bestrahlungsstärke um etwa einen Faktor drei; im gleichen Verhältnis ändern sich auch die Photoströme.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß innerhalb der Näherung, in der die Schottkysche Randschichttheorie überhaupt gilt, der vorgeschlagene Mechanismus das Rauschen der Randschicht recht befriedigend beschreibt.

Herrn Professor Dr. F. Möglich danke ich für viele fördernde Diskussionen, Herrn Dr. Faßbender für wertvolle Anregungen und experimentelle Hinweise.

⁴⁾ J. Faßbender u. B. Seraphin, Ann. Physik (6) 10, 374 (1952).

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung.

(Bei der Redaktion eingegangen am 12. September 1952.)

Zur Deutung der inneren Dämpfung fester Körper durch Schub- und Druckviskosität

Von H.O. Kneser und K. Voelz

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

An Hand einiger Meßergebnisse wird gezeigt, daß es sinnvoll ist, einen frequenzabhängigen Schub- und einen Volumviskositätskoeffizienten einzuführen, mit deren Hilfe man die Dämpfung verschiedener Schwingungsformen miteinander vergleichen kann. Für Metalle ist die Volumviskosität möglicherweise Null.

Die Frage, warum mechanische Schwingungen fester Körper auch bei Abwesenheit aller äußeren Einflüsse abklingen, also die Frage nach der inneren Dämpfung, ist in einigen Spezialfällen vollkommen geklärt¹⁾. Als Ursache der inneren Dämpfung erweist sich hier die Verlagerung von Fremdatomen auf solche Zwischengitterplätze, die durch die Deformation energetisch begünstigt sind. Dieser Prozeß vollzieht sich mit einer Relaxationszeit (von der Größenordnung einer Sekunde), aus deren Temperaturabhängigkeit seine Aktivierungswärme zu ermitteln ist.

Weitaus überwiegen an Zahl diejenigen Messungen, die nicht so klar deutbar sind. Es muß dann immer die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, daß außer Relaxationsprozessen — vielleicht mit einem ganzen Spektrum von Relaxationszeiten — noch andere irreversible Prozesse mitspielen, z. B. plastisches Fließen, so daß ein atomarer Mechanismus nicht angebbar ist, selbst wenn die Messungen sich über einen großen Frequenz- und Temperaturbereich erstrecken.

In allen diesen Fällen kann es nützlich sein, eine Vorfrage zu klären; nämlich die nach der inneren Dämpfung bei Schubdeformation und bei allseitiger Kompression bzw. Dilatation, zunächst ohne Rücksicht auf die Frequenzabhängigkeit. Damit verzichtet man auf die Ermittlung der Relaxationszeit und des „Relaxationsbetrages“ und führt statt dessen zweckmäßig nur eine Konstante (für jeden Deformationstyp) ein, formal vom Typ einer Viskositätskonstanten. Aus der Größe dieser Schub- und Druckviskosität (η und ζ) lassen sich unter Umständen qualitative Aussagen über den atomaren Mechanismus machen, genau wie bei

¹⁾ Vgl. den zusammenfassenden Bericht von C. Zener²⁾ und insbesondere die Arbeiten von Snoek³⁾.

²⁾ C. Zener, *Physica* 15, 111 (1949).

³⁾ J. Snoek, *Physica* 6, 591 (1939); 8, 711 (1941); 9, 862 (1942).

Gasen (vgl. ⁴⁾). Natürlich sind die beiden „Viskositäten“ im allgemeinen insofern keine echten Materialkonstanten, als sie von der Frequenz der Schwingung abhängen werden ⁵⁾.

Theoretische Behandlung

Der unserem Ansatz zugrunde liegende Zusammenhang zwischen Spannung (P) und Verformung (ε) ist durch Abb. 1 und den allgemeinen Ansatz:

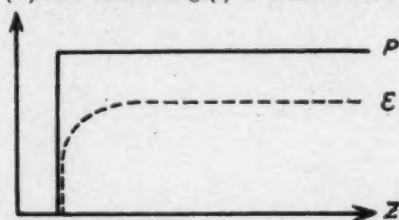


Abb. 1. ε als Funktion der Zeit bei gegebenem P

$$P = C_1 \cdot \varepsilon + C_2 \cdot \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

gegeben, wobei C_1 eine elastische und C_2 eine Viskositätskonstante darstellt.

Nach Komponenten des Spannungstensors (mit den Komponenten P_{ik}) aufgeteilt, lauten dann die exakten Gleichungen:

$$P_{ik} = G \varepsilon_{ik} + \eta \dot{\varepsilon}_{ik} \quad (i \neq k) \quad (2)$$

$$P_{ii} = 2G \varepsilon_{ii} + (K - \frac{2}{3}G) \theta + 2\eta \cdot \dot{\varepsilon}_{ii} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \dot{\theta}. \quad (3)$$

Darin bedeuten G und K den Schub- und Kompressionsmodul und $\theta = \sum \varepsilon_{ii}$ die Volumänderung.

Da wir hier nur periodische Vorgänge betrachten werden, setzen wir $\varepsilon = \varepsilon^0 e^{i\omega t}$ und entsprechend $\theta = \theta^0 e^{i\omega t}$ und erhalten aus (2) und (3):

$$P_{ik} = \mathfrak{G} \varepsilon_{ik} \quad (i \neq k) \quad (4)$$

$$P_{ii} = 2\mathfrak{G} \varepsilon_{ii} + (\mathfrak{K} - \frac{2}{3}\mathfrak{G}) \theta, \quad (5)$$

wo wir die komplexen Schub- und Kompressionsmoduln $\mathfrak{G} = G + i\omega\eta$ und $\mathfrak{K} = K + i\omega\zeta$ eingeführt haben.

Ein vollständiger Ansatz müßte an Stelle von (1) auch noch die höheren Ableitungen von ε nach der Zeit sowie die zeitlichen Ableitungen von P enthalten. So findet Meixner⁶⁾ aus thermodynamischen Überlegungen für fluide Medien als akustische Zustandsgleichung eine Gleichung der Form:

$$P + \tau \dot{P} = -K(\theta + \tau^* \dot{\theta}), \quad (5a)$$

in der entweder τ und τ^* beide Null oder beide von Null verschieden sein müssen. Da die folgenden Betrachtungen aber nur dem Vergleich der verschiedenen Schwingungsformen dienen und eine atomistische Deutung der Konstanten nicht beabsichtigt ist, können die mit den übrigen Ableitungen verbundenen Koeffizienten alle in die Real- und Imaginärteile von \mathfrak{G} und \mathfrak{K} zusammengefaßt werden, wodurch

⁴⁾ H. O. Kneser, Ann. Physik 6, 253 (1949).

⁵⁾ Das gilt übrigens auch für die normale, d. h. Schubviskosität der Gase, die sich — bei der Schallausbreitung — als frequenzabhängig erweist, sobald die Schwingungsdauer von der Größenordnung der Stoßzeit wird.

⁶⁾ J. Meixner, Z. Physik 131, 456 (1952).

diese frequenzabhängig werden. So würde für die Meixnersche Gleichung der Realteil von \mathfrak{R} durch die Funktion $K \frac{1 + \tau^* \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2}$ und der Imaginärteil durch die Funktion $K \frac{(\tau^* - \tau) \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}$ dargestellt werden. Man braucht also ζ nur durch $K \frac{\tau^* - \tau}{1 + \tau^2 \omega^2}$ zu ersetzen.

Dagegen sollen \mathfrak{G} und \mathfrak{R} nicht von den Abmessungen des schwingenden Körpers abhängen. Dämpfungseffekte, wie die von Bennewitz-Rötger⁷⁾ und Zener⁸⁾ untersuchte Dämpfung durch makroskopische Wärmeleitung, müssen vor einer Deutung von Meßergebnissen stets von diesen abgezogen werden.

Da die in der Akustik vorkommenden Deformationen ε und Spannungen P stets sehr klein sind, braucht ferner nicht berücksichtigt zu werden, daß die aus der modernen Theorie folgenden Gleichungen für nicht rein elastische Formänderungen nichtlinear sind, und es kann mit der linearen Näherung (1) bzw. (4) und (5) gearbeitet werden. Durch diese Linearisierung können die aus der Elastizitätstheorie bekannten Rechnungen, die zur Ermittlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von elastischen Wellen und der Eigenfrequenzen von schwingenden Stäben, Platten und dergleichen führen, in derselben Weise durchgeführt werden wie bisher mit den reellen Moduln. Als Ergebnis folgt eine komplexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit c .

Eine solche Welle läßt sich durch den Realteil der Funktion

$$\varepsilon = \varepsilon^0 \exp i \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \varepsilon^0 \exp \left(- \frac{\omega x \operatorname{Im} c}{|c|^2} \right) \exp i \omega \left(t - \frac{x \operatorname{Re} c}{|c|^2} \right)$$

darstellen, so daß die wahre Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{|c|^2}{\operatorname{Re} c}$ und der Absorptionskoeffizient $\frac{\omega \operatorname{Im} c}{|c|^2}$ wird. Bei der Berechnung der Eigenfrequenz ändert sich an den Randbedingungen nichts, und es folgt jetzt eine komplexe Frequenz $\omega = \omega_0 + i \alpha$, deren Realteil ω_0 die wirkliche Frequenz ist. Ein positiver Imaginärteil α bedeutet, daß die Schwingung abklingt. Das logarithmische Dekrement ϑ ist

$$\vartheta = 2\pi \frac{\alpha}{\omega_0} = 2\pi \frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega}.$$

Die Eigenfrequenzen kreisrunder zylindrischer Stäbe der Länge l und mit dem Halbmesser R sind für den Fall, daß beide Enden frei, die Stäbe also in ihren Knoten aufgehängt sind, für Torsionsschwingungen:

$$\omega_T = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\varrho}}$$

für Längsschwingungen:

$$\omega_L = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\varrho}}$$

und für Biegeschwingungen:

$$\omega_B = \frac{m^3}{2} \frac{R}{l^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\varrho}}.$$

⁷⁾ K. Bennewitz u. H. Rötger, *Physik. Z.* **37**, 578 (1936); **39**, 835 (1938).

⁸⁾ Cl. Zener, *Physic. Rev.* **52**, 230 (1937); **53**, 90 u. 100 (1938).

Hierin ist ϱ die Dichte und m die Wurzel der Gleichung $\cos m \operatorname{Coj} m = 1$. \mathfrak{E} ist der Elastizitätsmodul, der sich aus \mathfrak{G} und \mathfrak{K} zu

$$\mathfrak{E} = \frac{9 \mathfrak{K} \mathfrak{G}}{3 \mathfrak{K} + \mathfrak{G}} \quad (6)$$

errechnet. Damit wird für Torsionsschwingungen:

$$\vartheta_T = 2\pi \frac{\Im m \sqrt{\mathfrak{G}}}{\Re e \sqrt{\mathfrak{G}}}$$

und für Längs- und Biegeschwingungen:

$$\vartheta_L = \vartheta_B = 2\pi \frac{\Im m \sqrt{\mathfrak{E}}}{\Re e \sqrt{\mathfrak{E}}}$$

oder, da die Imaginärteile der komplexen Moduln im allgemeinen als klein gegenüber den Realteilen angesehen werden können,

$$\vartheta_T = \pi \frac{\Im m \mathfrak{G}}{\Re e \mathfrak{G}} = \frac{\pi \eta \omega}{G}. \quad (7)$$

Mit denselben Vernachlässigungen wird nach (6):

$$\mathfrak{E} = E \left\{ 1 + \frac{3K}{G(3K+G)} \eta \omega_0 i + \frac{G}{K(3K+G)} \zeta \omega_0 i \right\}$$

und damit

$$\vartheta_L = \vartheta_B = \pi \omega_0 \left\{ \frac{3K}{G(3K+G)} \eta + \frac{G}{K(3K+G)} \zeta \right\}. \quad (8)$$

Mit Hilfe der Poissonschen Zahl $\mu = \frac{1}{2} \frac{3K-2G}{3K+G}$ läßt sich dafür auch schreiben:

$$\vartheta_L = \vartheta_B = \frac{\pi \omega_0}{E} \left\{ \frac{4}{3} (1+\mu)^2 \eta + (1-2\mu)^2 \zeta \right\}. \quad (8a)$$

Für den Fall, daß $\zeta = 0$ ist, wird

$$\frac{\vartheta_L}{\vartheta_T} = \frac{2}{3} (1+\mu). \quad (9)$$

Wegen $\mu \leq \frac{1}{2}$ ist für $\zeta = 0$ also stets $\vartheta_L \leq \vartheta_T$.

Meßergebnisse

Die Überlegungen lassen sich nun auf Meßergebnisse anwenden, die mit einer früher beschriebenen Apparatur (vgl. ⁹⁾ und ¹⁰⁾) gewonnen wurden. Dort wurden die Resonanzfrequenzen und Abklingzeiten an frei schwingenden, zylindrischen

⁹⁾ R. Adolph, H. O. Kneser u. I. Schulz, Ann. Physik (6) 8, 99 (1950).

¹⁰⁾ H. O. Kneser, Z. angew. Physik 3, 113 (1951).

Metallstäben im Vakuum gemessen, und zwar Torsions-, Dehnungs- und Biegeschwingungen mit allen erreichbaren Oberschwingungen. Aus den Abklingzeiten ergeben sich Werte für ϑ_T , ϑ_L und ϑ_B in einem weiten Frequenzbereich.

η , aus ϑ_T nach (7) berechnet, ergibt sich, wie erwartet, frequenzabhängig. ϑ_T steigt zwar mit wachsender Frequenz an, aber erheblich schwächer als pro-

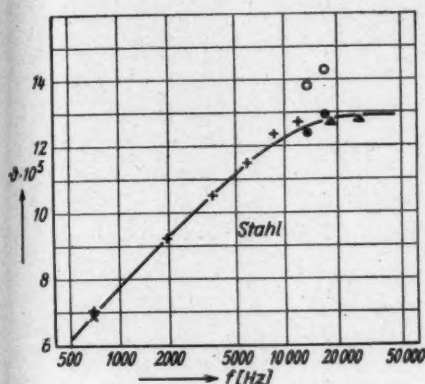


Abb. 2

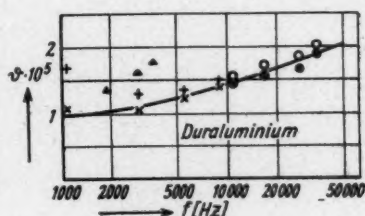


Abb. 3

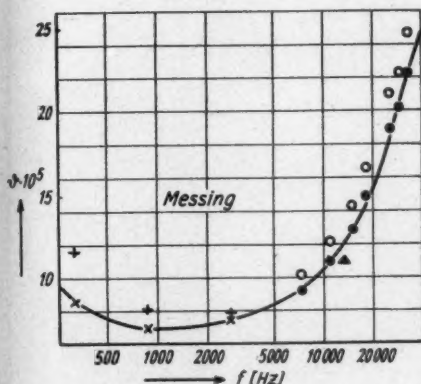


Abb. 4

Abb. 2—4. Frequenzabhängigkeit des logarithmischen Dekrements

- + Biegung
- × Biegung, vermindert um Dämpfung durch makroskopische Wärme-
ströme nach ⁷⁾ und ⁸⁾
- Torsion
- $\vartheta_T \cdot \frac{2}{3} (1 + \mu)$
- ▲ Längsschwingungen

portional ω . Dieser Anstieg deutet auf einen der in ²⁾ behandelten Relaxations-
effekte hin, wahrscheinlich die Dämpfung durch mikroskopischer Wärmeströme
zwischen den einzelnen Kristalliten ¹¹⁾. ϑ_L und ϑ_B erweisen sich bei gleicher Fre-
quenz innerhalb der Meßgenauigkeit gleich, wie ebenfalls nach den obigen Rech-
nungen zu erwarten (Abb. 2, 3 und 4).

¹¹⁾ R. H. Randall, F. C. Rose u. Cl. Zener, *Physic. Rev.* **76**, 1169 (1949).

ϑ_T ist durchweg größer, und zwar ziemlich genau um den Faktor $\frac{3}{2(1+\mu)}$, gleichfalls in Übereinstimmung mit (9). (Vgl. besonders Abb. 2)¹²⁾.

Grundsätzlich wäre es möglich, aus ϑ_T und ϑ_L oder ϑ_B vermittle (7) und (8) auch ζ zu errechnen. Die Ergebnisse streuen aber stark, weil $(1-2\mu)$ nicht genügend genau bekannt ist. ζ kommt nie größer als η , gelegentlich aber negativ heraus. Die Annahme $\zeta = 0$ wäre durchaus mit den Meßergebnissen vereinbar.

Das Zustandekommen dieser Arbeit wurde wesentlich durch Mittel begünstigt, die die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft für ein Stipendium zur Verfügung stellte. Ihr sei an dieser Stelle noch einmal dafür gedankt.

¹²⁾ Die Gültigkeit von (9) konnten Wegel und Walther¹³⁾ nur für 5 von 13 Materialien bestätigen; bei den übrigen traten Abweichungen bis zu 60% auf.

¹³⁾ R. L. Wegel u. H. Walther, *Physics* 6, 141 (1935).

Stuttgart, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. Oktober 1952.)

Beitrag zur Theorie optischer Interferenzschichtsysteme mit vorgegebenen Spektraleigenschaften¹⁾

Von Hubert Pohlack

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Das reziproke Durchlässigkeitsvermögen $1/D$ von Interferenzschichtanordnungen, deren Einzelschichten untereinander gleiche optische Dicken besitzen, läßt sich als gerades Polynom der Veränderlichen $A = \cos \varphi$ oder $A^* = \sin \varphi$ schreiben (φ ist der auf den einfachen Lichtdurchgang bezogene Phasenwinkel einer Schicht). Damit kann das bisher ungelöste Problem der Synthese von Mehrfachinterferenzschichten mit vorgegebenen Spektraleigenschaften auf die einfachere Aufgabe der Kurvendiskussion symmetrischer Polynome zurückgeführt werden.

Die vielfachen Anwendungsmöglichkeiten dünner optischer Schichten in der praktischen Optik sind bekannt²⁾. Maßgebend für die Verwendungsart einer Schichtenfolge etwa als Lichtfilter, Farbspiegel, Teilungselement oder Entspiegelungssystem sind die beiden Größen Durchlässigkeits- und Reflexionsvermögen, die ihrerseits von den optischen Daten der Gesamtanordnung (Lichtwellenlänge, Brechzahlen, Schichtdicken, Lichteinfallswinkel) abhängen.

Die Erfolge bei der Konstruktion von Schichtsystemen, welche bestimmten Anforderungen in bezug auf die spektral durchgelassene oder reflektierte Intensität genügen, wurden bisher dadurch erzielt, daß man die bekannten Grundeigenschaften gewisser einfach gebauter Schichtfolgen berücksichtigte und durch eine Art Interpolation bzw. durch Variation der einzelnen Parameter die gewünschten Eigenschaften annäherte. Dieses „analytische“ Verfahren befriedigt jedoch insofern nicht ganz, als damit über Art und Mannigfaltigkeit der erzielbaren Intensitätskurven keine allgemeinen Aussagen zu machen sind. Methoden, mit deren Hilfe die Schichtdaten auf Grund vorgegebener Spektraleigenschaften bestimmt werden können, sind bisher nicht bekannt. Im folgenden soll daher ein solches „synthetisches“ Verfahren, welches sich im Aufgabenbereich des Verfassers praktisch bewährt hat, skizziert werden¹⁾.

Die Frage nach der Zusammensetzung eines optischen Schichtsystems, das in vorgegebenen Spektralbereichen „möglichst genau“ gewisse vorgegebene Werte der Reflexion bzw. Durchlässigkeit annehmen soll, läuft auf ein Approximationsproblem hinaus. Dabei bleibt zunächst die Frage offen, welches der bekannten

¹⁾ Vgl. auch die ausführliche Darstellung des Verfassers: „Die Synthese optischer Interferenzschichtsysteme mit vorgegebenen Spektraleigenschaften“ (Jenaer Jahrbuch 1952).

²⁾ Vgl. H. Mayer, Physik dünner Schichten (Bd. I), Stuttgart, Wissenschaftl. Verlagsgesellschaft, 1950. Dasselbe ausführliches Literaturverzeichnis.

Approximationsverfahren für die Anwendung zweckmäßig ist³⁾. Der Vergleich des spektralen Intensitätsverlaufs optischer Interferenzschichten mit Kurven, welche die Übertragungseigenschaften elektrischer Siebschaltungen in Abhängigkeit von der Frequenz kennzeichnen, weist nun trotz vorhandener prinzipieller Unterschiede des Kurvencharakters auf die Analogie zwischen dem elektrischen und dem interferenzoptischen Vorgang hin (s. Abb. 1) und legt es nahe, zur Synthese optischer Schichtsysteme Methoden zu entwickeln, welche den in der allgemeinen elektrischen Siebschaltungstheorie⁴⁾ üblichen Methoden verwandt sind. Als besonders vorteilhaft erweist es sich, wenn man hierzu die spezielle Theorie der Rundfunksiebschaltungen⁵⁾ heranzieht.

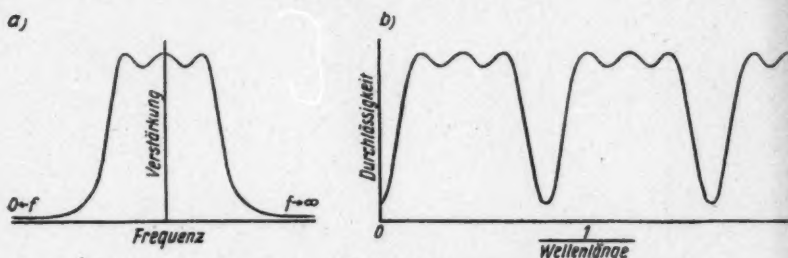


Abb. 1. a) Übertragungskurve einer Rundfunksiebschaltung, b) Spektralkurve eines optischen Interferenzschichtsystems

Um die Analogie auszunutzen, muß die Intensitätsfunktion des optischen Systems zunächst in eine dem elektrischen Problem entsprechende Gestalt gebracht werden. Dies geschieht dadurch, daß man den Kehrwert des Durchlässigkeitsvermögens als Funktion des Phasenwinkels schreibt und gleiche optische Schichtdicken voraussetzt. Man erhält dann nämlich Polynome der folgenden allgemeinen Form:

$$\frac{1}{D} = A_{k0} + A_{k2}A^2 + A_{k4}A^4 + \dots + A_{k/2k}A^{2k} \quad (1)$$

und
$$\frac{1}{D} = B_{k0} + B_{k2}A^{*2} + B_{k4}A^{*4} + \dots + B_{k/2k}A^{*2k} \quad (2)$$

mit
$$A = \cos \varphi = \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \quad \text{und} \quad A^* = \sin \varphi = \sin \frac{2\pi}{\lambda} \Delta.$$

Dabei bedeuten λ die Lichtwellenlänge, $\Delta = n_i d_i = \text{const}$ die optische Schichtdicke, n_i die Schichtbrechzahlen ($i = 1, \dots, k$), d_i die (geometrischen) Schichtdicken und k die Anzahl der Einzelschichten. Die Koeffizienten A und B sind

³⁾ In einer neueren zusammenfassenden Arbeit „Über die Lichtteilungsfunktionen dünner Mehrfachschichten und ihre Anwendungen“ (Z. angew. Phys. 3, 53 (1951)) zeigt H. Schröder bereits das Problem auf, allgemeine, nicht auf einem „Probieren“ beruhende Verfahren zur Berechnung von Mehrfachinterferenzschichten zu entwickeln; Schröder denkt dabei an das Hilfsmittel der Fourier-Analyse.

⁴⁾ Vgl. R. Feldtkeller, Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Stuttgart, S. Hirzel, 3. Aufl. 1950.

⁵⁾ Vgl. R. Feldtkeller, Einführung in die Theorie der Rundfunksiebschaltungen. Leipzig, S. Hirzel, 3. Aufl. 1945.

gewisse, aus der Theorie der Interferenzschichten herleitbare Kombinationen der Schichtbrechzahlen n_1, \dots, n_k und der Außenbrechzahlen n_0 und n_g .

Die Struktur der Intensitätsfunktionen (1) (2) und die Definition ihrer Variablen als trigonometrische Funktionen lassen nun eine Reihe allgemeiner Aussagen über die spektralen Kurveigenschaften von Interferenzschichtsystemen zu, bevor man überhaupt spezielle Schichtkombinationen ins Auge faßt. Insbesondere ergeben sich aus einer Klassifizierung der in der praktischen Optik geforderten

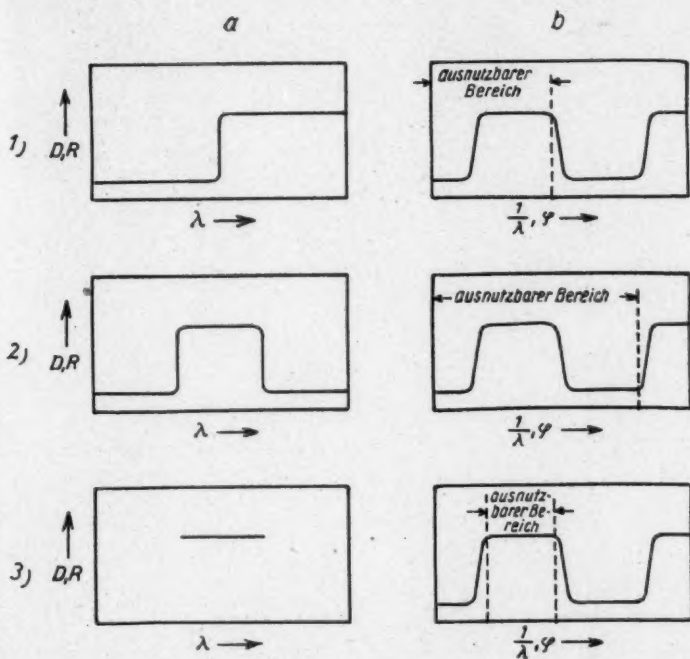


Abb. 2. Klassifizierung der Spektralkurvenprofile. a) Forderung, b) tatsächlicher spektraler Verlauf (schematisch)

Spektralkurven Hinweise auf die „ausnutzbaren“ Bereiche solcher Kurven. Es kann nämlich etwa folgende Einteilung getroffen werden (s. Abb. 2):

1. Die Spektralfunktion nimmt oberhalb und unterhalb einer bestimmten Wellenlänge je einen konstanten Wert an (Kurz- und Langfilter, speziell: Farbtrennfilter, Kaltlichtfilter).

2. Die Funktion verläuft in einem begrenzten Spektralbereich konstant und geht sowohl oberhalb wie unterhalb dieses Bereichs zu einem konstanten zweiten Wert über (Filter zur Aussonderung bestimmter Spektralbereiche, speziell: Linienfilter).

3. Die Funktion verläuft in einem begrenzten Spektralbereich konstant, außerhalb dieses Bereichs interessiert der Kurvenverlauf nicht (z. B.: Reflexionsminderung und Reflexionssteigerung im Sichtbaren, Lichtteilungs Spiegel).

Geht man zur Aufgabe der eigentlichen Schichtsynthese über, so ist es zweckmäßig, die Mannigfaltigkeit der Polynome (1) (2) zu beschränken und unter dem Gesichtspunkt der Einfachheit der analytischen Terme auszuwählen. Die Kurvenverläufe sollen folgenden einschränkenden Bedingungen unterworfen werden:

1. Das Polynom $1/D$ vom Grade $2k$ besitze $2k-1$ einfache Extremalstellen, an denen es abwechselnd nur zwei verschiedene Funktionswerte $(1/D)_{\max}$ und $(1/D)_{\min}$ annehmen soll. Als Sonderfall können die Extremalstellen in einem Minimum oder Maximum der Ordnung $2k-1$ in der Symmetriemitte zusammenfallen.

2. Das Polynom $1/D(A)$ vom Grade $2k$ besitze in der Symmetriemitte einen Extremwert der Ordnung 3, 5, ... oder $2k-3$, das „komplementäre“ Polynom $1/D(A^*)$ in der Mitte einen Extremwert der Ordnung $2k-3$, $2k-1$, ... oder 3.

3. Das Polynom $1/D$ vom Grade $2k$ besitze in der Symmetriemitte einen Extremwert der Ordnung 1, 3, ... oder $2k-3$. Der weitere Kurvenverlauf ist ohne Interesse.

Um nun zu möglichst einfachen Ausdrücken zu gelangen, welche die vorgegebenen Kurveneigenschaften mit den optischen Parametern in Beziehung bringen, werden (ähnlich dem Vorgehen in der Rundfunksiebschaltungstheorie) Hilfspolynome P der Veränderlichen*)

$$\frac{A}{A_w} \quad \text{bzw.} \quad \frac{A}{A_g}$$

eingeführt. Dabei wird gefordert, daß P den gleichen Schwankungscharakter des Kurvenverlaufs zwischen $P = +1$ und $P = -1$ wie die gesuchte Funktion $1/D$ zwischen $(1/D)_{\max}$ und $(1/D)_{\min}$ besitzt. Das interessierende „Spektralband“ der Funktion $1/D$ soll dem Abszissenintervall

$$-1 \leq \frac{A}{A_w} \leq +1 \quad \text{bzw.} \quad -1 \leq \frac{A}{A_g} \leq +1$$

der P -Polynome entsprechen. Derartige Hilfspolynome bieten sich in Form der bekannten „Tschebyscheff-Polynome erster Art“ (Abb. 3) an für den Fall, daß das Ausgangspolynom $2k$ -ten Grades $2k-1$ „Höcker“ und „Täler“ besitzt

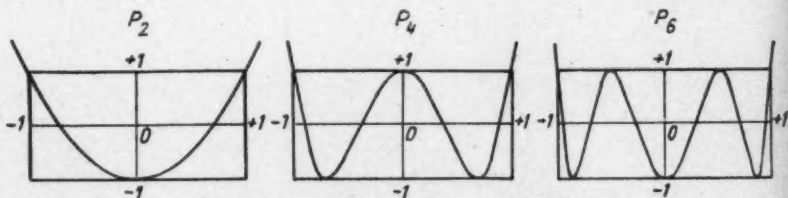


Abb. 3. Tschebyscheff-Polynome 2., 4. und 6. Grades

*) $\pm A_w$ sind die „Bandgrenzen der Welligkeit“, d. h. die Werte der Veränderlichen A für welche das Polynom $1/D$ den durch Maxima und Minima gegebenen Schwankungsbereich verläßt. $\pm A_g$ sind willkürlich festsetzbare Bandgrenzen, wobei $|A_g| \geq |A_w|$ ist.

(vgl. o. a. Bedingung 1 und Abb. 4). Für die weiteren Kurvenbedingungen (2 und 3) ergeben sich andere, relativ einfach herleitbare Terme (vgl. Anm. 1).

Wir übertragen jetzt die Kurveneigenschaften des Hilfspolynoms auf die gesuchte Funktion $1/D$ an dem Beispiel der Zweifachschicht für die Kurvenbedingung 1 ($2k-1=3$ Extremwerte). Das entsprechende Tschebyscheff-Polynom (4-ten Grades) lautet:

$$P_4 = +1 - 8 \frac{A^2}{A_w^2} + 8 \frac{A^4}{A_w^4}.$$

Verlangt man von $1/D$ den gleichen Kurvencharakter (d. h. einen einfachen Extremwert $(\frac{1}{D})_m$ in der Mitte und links und rechts je einen weiteren, einfachen, symmetrisch zur Bandmitte liegenden Extremwert $(\frac{1}{D})_e$), so wird

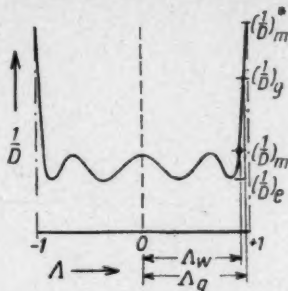


Abb. 4. Bandeigenschaften einer Vierfachinterferenzschicht mit Tschebyscheffschem Verhalten des Spektralkurvenverlaufs

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} &= P_4 \frac{(\frac{1}{D})_m - (\frac{1}{D})_e}{2} + \frac{(\frac{1}{D})_m + (\frac{1}{D})_e}{2} \\ &= (\frac{1}{D})_m - 4 \frac{(\frac{1}{D})_m - (\frac{1}{D})_e}{A_w^2} A^2 + 4 \frac{(\frac{1}{D})_m - (\frac{1}{D})_e}{A_w^4} A^4. \end{aligned} \quad (3)$$

Der geforderte Kurvenverlauf ist also nach Einsetzen von Zahlenwerten für die charakteristischen Bandgrößen durch Gl. (3) festgelegt. Die allgemeinen Polynome des Zweifachschichtsystems sind gemäß (1) (2) zu schreiben:

$$\frac{1}{D} = A_{20} + A_{22} A^2 + A_{24} A^4 = B_{20} + B_{22} A^{*2} + B_{24} A^{*4}. \quad (4)$$

Koeffizientenvergleich zwischen (3) und (4) liefert dann z. B. das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= \frac{1}{D_m} \\ A_{22} &= -4 \frac{(\frac{1}{D})_m - (\frac{1}{D})_e}{A_w^2} \\ A_{24} &= +4 \frac{(\frac{1}{D})_m - (\frac{1}{D})_e}{A_w^4} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

für die gesuchten Brechzahlen. Wegen $A^* = \sin \varphi$ ist B_{20} gleich dem Wert der reziproken Durchlässigkeit für die einfache Grenzfläche zwischen n_0 und n_g , also eine Funktion der Außenbrechzahlen allein $(B_{20} = (\frac{1}{D})_m^* = f(n_0, n_g))$. Im allgemeinen werden n_0, n_g und damit B_{20} vorgegeben sein. Aus $A^2 = 1 - A^{*2}$ folgt $B_{22} = A_{20} + A_{22} + A_{24}$. Damit wird das Gleichungssystem (5) linear abhängig und kann etwa auf

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= \frac{1}{D_m} \\ A_{22} &= -4 \frac{(\frac{1}{D})_m - (\frac{1}{D})_e}{A_w^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

reduziert werden. Bei vorgegebenem $\left(\frac{1}{D}\right)_m^*$ ist aber auch über A_w^2 verfügt, wie etwa aus (3) folgt:

$$\left(\frac{1}{D}\right)_m^* = \left(\frac{1}{D}\right)_m - 4 \frac{\left(\frac{1}{D}\right)_m - \left(\frac{1}{D}\right)_e}{A_w^2} + \frac{\left(\frac{1}{D}\right)_m - \left(\frac{1}{D}\right)_e}{A_w^4}$$

und

$$\frac{\left(\frac{1}{D}\right)_m - \left(\frac{1}{D}\right)_e}{\left(\frac{1}{D}\right)_m^* - \left(\frac{1}{D}\right)_e} = \frac{A_w^2}{(A_w^2 - 2)^2},$$

womit also die beiden gesuchten Schichtbrechzahlen durch das Gleichungssystem (6) bei vorgegebenen Extremwerten der Durchlässigkeit (D_m , D_e und D_m^*) vollständig bestimmt sind.

Die Schreibweise der Intensitätsfunktion in Polynomform, die Auswahl symmetrischer, einfach gebauter Approximationspolynome mit charakteristischen Funktionsverläufen, Transformierung dieser Hilfspolynome in den gewünschten Schwankungsbereich der Durchlässigkeitsfunktion und die eigentliche rechnerische Bestimmung der optischen Parameter mit Hilfe des Koeffizientenvergleichs bilden den Grundgedanken des hier kurz erläuterten Verfahrens zur Synthese von Interferenzschichtsystemen. Eine ausführliche Darstellung findet man in der oben zitierten Arbeit des Verfassers (Anm. 1).

Jena, Carl-Zeiß-Werke.

(Bei der Redaktion eingegangen am 14. Oktober 1952.)

Die Spannungsabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit starker nicht assoziierender Elektrolyte unter Berücksichtigung des Raumbedarfs der Ionen

Von H. Falkenhagen und G. Kelbg

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Spannungsabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit starker nicht assoziierender Elektrolyte wurde von H. Falkenhagen¹⁾ theoretisch untersucht. In dieser Arbeit wurde gezeigt, welche Bedeutung die Relaxationszeit der Ionenwolke in der Theorie der Elektrolyte hat und in welchem Zusammenhang sie mit dem von M. Wien²⁾ gefundenen Spannungseffekt steht. Die Durchführung der Rechnung in der erwähnten Arbeit erfolgte unter der Annahme, daß die Ionen als Punktladungen angesehen werden können. Da nun aber die Ionengröße insbesondere bei höheren Konzentrationen ein nicht zu vernachlässigender Faktor in der Theorie der Elektrolyte³⁾ ist, soll in diesem Sinne eine Erweiterung der Ansätze vorgenommen werden. Dabei wird überdies noch an Stelle der Boltzmann-Verteilung eine neue Verteilungsfunktion⁴⁾ benutzt, die dem endlichen Ionenradius bzw. der Hydratation der Ionen Rechnung trägt. Die Brownsche Bewegung der Ionen im Sinne von Onsager wird nicht berücksichtigt, ebenfalls wird die Wirkung der Elektrophorese außer acht gelassen. Unsere Ergebnisse haben daher nur qualitativen Charakter⁵⁾.

Eine Rechnung zeigt, daß im stationären Fall die Relaxationskraft zunächst mit wachsender Feldstärke ansteigt, um dann nach Überschreiten eines Maximums abzusinken. Dieses liegt daran, daß die Relaxationszeit der Ionenwolke eine gewisse Größe besitzt, und die Dissymmetrie der Ionenwolke bei hohen Ionen- geschwindigkeiten sich nicht mehr ausbilden kann. Aus einigen Abbildungen am Ende der Arbeit ist zu ersehen, in welcher Weise für 1–1wertige Elektrolyte der von M. Wien benutzte Ausdruck $\delta(a, \beta)$ vom Ionenradius a abhängig ist.

¹⁾ H. Falkenhagen, *Physik. Z.* **32**, 353 (1931).

²⁾ M. Wien, *Ann. Physik* **1**, 400 (1929).

³⁾ H. Falkenhagen, M. Leist u. G. Kelbg, *Ann. Physik* **6**, 51 (1952).

⁴⁾ M. Dutta u. S. N. Bagchi, *Indian J. Physics* **24**, 8 (1950); S. N. Bagchi, *J. Ind. chem. Soc.* **27**, 199 (1950); M. Eigen u. E. Wicke, *Naturwiss.* **38**, 543 (1951); H. Falkenhagen u. G. Kelbg, *Ann. Physik* **6**, 60 (1952).

⁵⁾ Die Brownsche Bewegung der Ionen sowie die Elektrophorese wird in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit unter Berücksichtigung des Raumbedarfs der Ionen berücksichtigt werden. Verallgemeinerung der Dissertation von W. S. Wilson, Yale University 1936.

1. Berechnung der Relaxationskraft

Sehen wir von den Brownschen Bewegungsschwankungen im Sinne von Onsager^{a)} ab, so genügt die Verteilungsfunktion \bar{n}_s der Kontinuitätsgleichung¹⁾

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \text{Div} (n_s v_s) = 0. \quad (1)$$

Gl. (1) haben wir auf ein ruhendes Koordinatensystem bezogen. Es bedeuten n_s die Zahl der Ionen der Sorte s im cm^3 und v_s ihre Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit v_s wird durch die elektrische Feldstärke \mathcal{E} und ein Konzentrationsgefälle verursacht. Daher können wir ansetzen

$$v_s = - \frac{k T}{\varrho_s \left(1 - \frac{n_s}{N_s}\right) n_s} \text{Grad } n_s + \frac{1}{\varrho_s} \mathfrak{R}_s. \quad (2)$$

Aus (1) entstehen so die Gleichungen

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} = \text{Div} \left(\frac{k T}{\varrho_s \left(1 - \frac{n_s}{N_s}\right)} \text{Grad } n_s - \frac{n_s}{\varrho_s} \mathfrak{R}_s \right). \quad (3)$$

Hierin bedeuten ϱ_s die Reibungsgrößen, \mathfrak{R}_s die auf die Ionen wirkenden Kräfte, k die Boltzmannsche Konstante, T die absolute Temperatur und N_s die Besetzungsdichten der Ionen der Sorte s . Gehen wir zu einem Koordinatensystem über, welches sich mit einem Ion mitbewegt, so erhalten wir aus den Gl. (3) folgende Beziehungen

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} - V \frac{\partial n_s}{\partial x} = \text{div} \left(\frac{k T}{\varrho_s \left(1 - \frac{n_s}{N_s}\right)} \text{grad } n_s - \frac{n_s}{\varrho_s} \mathfrak{R}_s \right). \quad (4)$$

Hierin bedeutet V die Geschwindigkeit des betreffenden Ions. Für die Kraft \mathfrak{R}_s können wir ansetzen

$$\mathfrak{R}_s = e_s \mathcal{E} - e_s \text{grad } \psi, \quad (5)$$

worin e_s die Ladung des Ions der Sorte s und ψ das elektrische Potential bedeuten. Setzen wir (5) in (4) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} - V \frac{\partial n_s}{\partial x} = \text{div} \left(\frac{k T}{\varrho_s \left(1 - \frac{n_s}{N_s}\right)} \text{grad } n_s - \frac{n_s}{\varrho_s} \mathcal{E} + \frac{n_s e_s}{\varrho_s} \text{grad } \psi \right). \quad (6)$$

Zu diesen Gleichungen kommt nach die Poissonsche Differentialgleichung hinzu

$$\Delta \psi = - \frac{4\pi}{D_0} \sum_s n_s e_s. \quad (7)$$

D_0 ist die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels, welche wir konzentrationsunabhängig annehmen.

Bei nicht zu hohen Konzentrationen können wir die Verteilungsfunktion n_s zusammensetzen aus einer Nulllösung n_s^0 und einer Störung v_s

$$n_s = n_s^0 + v_s. \quad (8)$$

^{a)} L. Onsager, Physik. Z. 28, 277 (1927); P. Debye u. H. Falkenhagen, Physik. Z. 29, 401 (1928).

Unter Verwendung einiger Näherungen ergeben sich dann aus (6) für die Funktionen v_s folgende Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} - V \frac{\partial v_s}{\partial x} = \operatorname{div} \left(\frac{k T}{\varrho_s \left(1 - \frac{n_s^0}{N_s}\right)} \operatorname{grad} v_s + \frac{n_s^0 e_s}{\varrho_s} \operatorname{grad} \psi \right). \quad (9)$$

Wir formen um und erhalten

$$\Delta v_s + \frac{\varrho_s V}{k T} \left(1 - \frac{n_s^0}{N_s}\right) \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{\varrho_s}{k T} \left(1 - \frac{n_s^0}{N_s}\right) \frac{\partial v_s}{\partial t} = - \frac{n_s^0 e_s}{k T} \left(1 - \frac{n_s^0}{N_s}\right) \Delta \psi. \quad (10)$$

Wir behandeln nun den Spezialfall eines symmetrischen Elektrolyten, in dem die Ionen gleiche Beweglichkeiten und gleiche Besetzungsdichten haben sollen.

$$e_1 = -e_2 = e; n_1^0 = n_2^0 = n; \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho; N_1 = N_2 = N.$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$v_1 = -v_2 = -\frac{n e}{k T} \left(1 - \frac{n}{N}\right) f e^{i \omega t}$$

und mit $\psi = \psi_0 e^{i \omega t}$ schreiben sich die Gl. (10)

$$\Delta f + \frac{\varrho V}{k T} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\partial f}{\partial x} - i \omega \frac{\varrho}{k T} \left(1 - \frac{n}{N}\right) f = \Delta \psi_0. \quad (11)$$

Die Potentialgleichung lautet

$$\Delta \psi_0 = \frac{8 \pi}{D_0 k T} n e^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) f. \quad (12)$$

Aus (11) und (12) erhalten wir

$$\Delta f - K^2 f + 2 \mu \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

und

$$\Delta \psi_0 = \kappa^2 f. \quad (14)$$

Es ist

$$\kappa^2 = \frac{8 \pi}{D_0 k T} n e^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (15)$$

$$K^2 = \kappa^2 (1 + i \omega \theta) \quad (16)$$

$$\theta = \frac{\varrho}{k T \kappa^2} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (17)$$

$$2 \mu = \frac{\varrho V}{k T} \left(1 - \frac{n}{N}\right). \quad (18)$$

Wir sind in der Lage eine Lösung von Gl. (13) anzugeben

$$f = C \frac{e}{D_0} \frac{e^{\kappa a}}{1 + \kappa a} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{e^{-\sqrt{\kappa^2 + \mu^2} r}}{r} e^{-\mu r \cos \vartheta}. \quad (19)$$

Die Potentialgleichung im Außenraum der Ionenkugel lautet dann nach (14)

$$\Delta \psi_0 = C \frac{e}{D_0} \kappa^2 \frac{e^{\kappa a}}{1 + \kappa a} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{e^{-\sqrt{\kappa^2 + \mu^2} r}}{r} e^{-\mu r \cos \vartheta}. \quad (20)$$

Das Potential ψ_i , welches im Innern der Ionenkugel herrscht, genügt der homogenen Gleichung

$$\Delta \psi_i = 0. \quad (21)$$

Um die Relaxationskraft auf ein Ion auszurechnen, verschaffen wir uns von Gl. (20) eine Lösung, die im Unendlichen verschwindet. Sodann integrieren wir Gl. (21), so daß das Potential und seine Normalableitung auf der Oberfläche der Ionenkugel in die entsprechenden Werte von ψ_0 übergeht.

In Gl. (20) entwickeln wir die Funktion $e^{-\mu r \cos \vartheta}$ in eine Reihe nach Kugelfunktionen. Es sei

$$e^{-\mu r \cos \vartheta} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(r) P_s(\cos \vartheta). \quad (22)$$

Die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich nach der Formel

$$a_s(r) = \frac{2s+1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-\mu r \xi} P_s(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Verwenden wir die Abkürzung $\Omega = C \frac{e}{D_0} \frac{e^{\kappa a}}{1 + \kappa a} \kappa^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right)$, so lautet Gl. (20)

$$\Delta \psi_0 = \Omega \frac{e^{-\sqrt{\kappa^2 + \mu^2} r}}{r} \sum_{s=0}^{\infty} a_s(r) P_s(\cos \vartheta). \quad (24)$$

Einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $\sum_{s=0}^{\infty} b_s(r) P_s(\cos \vartheta)$ superponieren wir noch eine Lösung der homogenen Gleichung, welche im Außenraum der Ionenkugel endlich bleibt: $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s}{r^{s+1}} P_s(\cos \vartheta)$. Für ψ_0 machen wir also den Ansatz

$$\psi_0 = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{A_s}{r^{s+1}} + b_s(r) \right) P_s(\cos \vartheta). \quad (25)$$

Da

$$\Delta (b_s(r) P_s(\cos \vartheta)) = P_s(\cos \vartheta) \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{db_s}{dr} \right) - \frac{s(s+1)}{r^2} b_s \right)$$

ist, ergeben sich zur Bestimmung der Funktionen $b_s(r)$ folgende Differentialgleichungen

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{db_s}{dr} \right) - \frac{s(s+1)}{r^2} b_s = \Omega \frac{e^{-\sqrt{\kappa^2 + \mu^2} r}}{r} a_s(r). \quad (26)$$

Im Innenraum setzen wir als Lösung der Potentialgleichung $\Delta \psi_i = 0$ die Entwicklung an

$$\psi_i = \sum_{s=0}^{\infty} B_s r^s P_s(\cos \vartheta). \quad (27)$$

Aus der Forderung der Stetigkeit des Potentials und seiner Normalableitung bei $r = a$ erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{A_s}{a^{s+1}} + b_s(a) = B_s a^s \quad (28)$$

$$-\frac{A_s}{a^{s+2}} (s+1) + \frac{db_s(a)}{dr} = s B_s a^{s-1}, \quad (29)$$

aus denen die Koeffizienten A_s und B_s berechnet werden können. Die Relaxationskraft K_R , welche in x -Richtung wirkt, finden wir dann aus dem Potential ψ .

Es ist

$$K_R = -e \frac{\partial \psi_1(0)}{\partial x}. \quad (30)$$

Die Entwicklung (27) liefert für die Relaxationskraft

$$K_R = -e B_1. \quad (31)$$

Wir brauchen also nur den Koeffizienten B_1 zu bestimmen. Aus den Gln. (28) und (29) folgt für $s = 1$

$$B_1 = \frac{2}{3} \frac{b_1(a)}{a} + \frac{1}{3} \frac{db_1(a)}{dr}. \quad (32)$$

Die Funktion $b_1(r)$ ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{db_1}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} b_1 = \Omega \frac{e^{-\alpha r}}{r} a_1(r) \quad (33)$$

$$\alpha = \sqrt{K^2 + \mu^2}.$$

Der Entwicklungskoeffizient $a_1(r)$ berechnet sich aus Gl. (23)

$$a_1(r) = -\frac{3}{\mu^2} \frac{d}{dr} \frac{\sin \mu r}{r}. \quad (34)$$

Die Differentialgleichung (32) geht somit über in

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{db_1}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} b_1 = -\frac{3\Omega}{\mu^2} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \frac{d}{dr} \frac{\sin \mu r}{r}. \quad (35)$$

Das allgemeine Integral der Gl. (35) lautet

$$b_1(r) = \frac{\Omega}{\mu^2} \frac{1}{r^2} \int_0^r t^2 e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} \frac{\sin \mu t}{t} dt - \frac{\Omega}{\mu^2} r \int_0^r \frac{e^{-\alpha t}}{t} \frac{d}{dt} \frac{\sin \mu t}{t} dt + A r + \frac{B}{r^2}. \quad (36)$$

Aus Gl. (32) folgt dann für den gesuchten Koeffizienten B_1

$$B_1 = -\frac{\Omega}{\mu^2} \int_0^a \frac{e^{-\alpha t}}{t} \frac{d}{dt} \frac{\sin \mu t}{t} dt + A. \quad (37)$$

Die Konstante A ist gleich Null zu setzen, da für kleiner werdende Feldstärken die Relaxationskraft Null werden muß.Führen wir Ω ein, so lautet die Formel für die Relaxationskraft

$$K_R = C \frac{e^2 e^{\epsilon \omega t}}{D_0 \mu^2} \cdot \frac{\kappa^2 e^{\kappa a}}{1 + \kappa a} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \int_0^a \frac{e^{-\alpha t}}{t} \frac{d}{dt} \frac{\sin \mu t}{t} dt. \quad (38)$$

Wir betrachten nun den stationären Fall. In Formel (38) setzen wir $\omega = 0$ und haben von nun an für $\alpha = \sqrt{\kappa^2 + \mu^2}$ zu setzen. Ferner führen wir in Gl. (17) für ϱ $V = eE$ ein und erhalten so μ als Funktion der Feldstärke E

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{eE}{kT} \left(1 - \frac{n}{N} \right). \quad (39)$$

Wir setzen noch $\mu = \kappa \cdot \beta$ an mit

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{e}{kT\kappa} \left(1 - \frac{n}{N} \right) E. \quad (40)$$

Aus Formel (38) erhalten wir dann nach Ausführung der Integration für die Relaxationskraft folgenden Ausdruck

$$K_{R, \omega=0} = \frac{1}{2} C \frac{e^3}{D_0} \frac{\kappa^2 e^{\kappa a}}{1 + \kappa a} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \cdot \left\{ e^{-\kappa a \sqrt{1+\beta^2}} \left(\frac{1 - \kappa a \sqrt{1+\beta^2}}{(\kappa a)^2 \beta^2} \sin \kappa a \beta - \frac{1}{\kappa a \beta} \cos \kappa a \beta \right) + \frac{1}{2\beta^2} \left(\text{Ei} [-\kappa a (\sqrt{1+\beta^2} + \beta)] - \text{Ei} [-\kappa a (\sqrt{1+\beta^2} - \beta)] \right) \right\} \quad (41)$$

Wir führen jetzt folgende Funktion ein

$$y(a, \beta) = -\frac{3}{2} e^{\kappa a} \left\{ e^{-\kappa a \sqrt{1+\beta^2}} \left(\frac{1 - \kappa a \sqrt{1+\beta^2}}{(\kappa a)^2 \beta^2} \sin \kappa a \beta - \frac{1}{\kappa a \beta} \cos \kappa a \beta \right) + \frac{1}{2\beta^2} \left(\text{Ei} [-\kappa a (\sqrt{1+\beta^2} + \beta)] - \text{Ei} [-\kappa a (\sqrt{1+\beta^2} - \beta)] \right) \right\} \quad (42)$$

und erhalten dann für die Relaxationskraft

$$K_{R, \omega=0} = -\frac{1}{3} C \frac{e^3}{D_0} \frac{\kappa^2}{1 + \kappa a} \left(1 - \frac{n}{N}\right) y(a, \beta). \quad (43)$$

Ist β klein, so können wir dafür auch schreiben

$$K_{R, \omega=0} = -\frac{1}{3} C \frac{e^3}{D_0} \frac{\kappa^2}{1 + \kappa a} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \beta \quad (44)$$

oder genauer, indem wir für $y(a, \beta)$ in (43) die Näherung einsetzen:

$$y(a, \beta) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} e^{\kappa a (1 - \sqrt{1+\beta^2})} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{10} \left((\kappa a)^2 + \frac{2\kappa a}{\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{2}{1+\beta^2} \right) \right\}.$$

Lassen wir den Ionenradius gegen Null gehen, so erhalten wir für $y(0, \beta)$ den Ausdruck

$$y(0, \beta) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta} - \frac{3}{4} \frac{1}{\beta^2} \log \frac{\sqrt{1+\beta^2} + \beta}{\sqrt{1+\beta^2} - \beta}. \quad (46)$$

Der Zusammenhang zwischen β und der Feldstärke E' in Volt/cm wird für 1-lwertige Elektrolyte durch die Formel gegeben

$$E' = 1,643 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{1 - \frac{n}{N}}} \beta. \quad (47)$$

Wir erkennen daraus, daß $\sqrt{\gamma} \cdot \beta \ll 1$ sein muß, damit Feldstärken entstehen, die wirklich erzeugt werden können.

2. Berechnung der Leitfähigkeit

Aus dem Gleichgewicht der Kräfte $eE - qV + K_R = 0$ berechnen wir die Geschwindigkeit eines Ions zu

$$V = \frac{1}{q} (eE + K_R). \quad (48)$$

Für die spez. Leitfähigkeit ergibt sich somit der Ausdruck

$$\lambda = \frac{2e^3}{q} n + \frac{2e}{qE} n K_R \quad (49)$$

oder

$$\lambda = \lambda_{\infty} + \frac{\lambda_{\infty}}{e E} K_R. \quad (50)$$

Für die molare Leitfähigkeit folgt dann

$$\Lambda(\beta) = \Lambda_{\infty} - C' \Lambda_{\infty} \frac{y(a, \beta)}{\beta}. \quad (51)$$

 C' ist eine neue Konstante.Wir führen nun die von M. Wien benutzte Größe δ ein, die durch folgende Gleichung definiert ist

$$\delta(a, \beta) = \frac{\Lambda(\beta) - \Lambda(o)}{\Lambda(\infty) - \Lambda(o)}. \quad (52)$$

Da $\Lambda(\infty) = \Lambda_{\infty}$ ist, folgt für δ die Beziehung

$$\delta(a, \beta) = 1 - \frac{y(a, \beta)}{\beta}. \quad (53)$$

Eine Vorstellung vom Verlauf der Funktionen $y(a, \beta)$ und $\delta(a, \beta)$ zeigen die Abb. 1 bis 3. In Abb. 2 ist die Funktion $y(a, \beta)$ in Abhängigkeit von β dargestellt. Da nach Gl. (43) die Relaxationskraft proportional zu $y(a, \beta)$ ist, erkennen wir, daß die Relaxationskraft ein Maximum erreicht, um dann für noch größer werdende Feldstärken auf Null abzusinken. Ein Vergleich mit der Kurve $y(o, \beta)$ zeigt, daß sich mit zunehmender Ionengröße die Relaxationskraft verkleinert. In Abb. 2 ist die Funktion $\delta(a, \beta)$ für NaCl bei $\sqrt{\gamma} = 0,5$ Mol/l aufgetragen. Abb. 3 zeigt den Einfluß des Ionenradius a auf den Verlauf der Funktion $\delta(a, \beta)$ bei $\sqrt{\gamma} = 0,5$ Mol/l.

Während der Korrektur erschien eine ausführliche Arbeit von E. Wicke und M. Eigen, Z. Elektrochem. **56**, 551–561 (1952). Die in der quantitativen Diskussion der Aktivitätskoeffizienten verwandte Verteilungsfunktion Gl. (30) und (31), die die Besetzungszahlen mit heranzieht, weicht von der aus einer statistischen Ableitung resultierenden Gl. (24) ab. Diese beiden Verteilungsfunktionen liefern für die Elektrizitätsdichte ver-

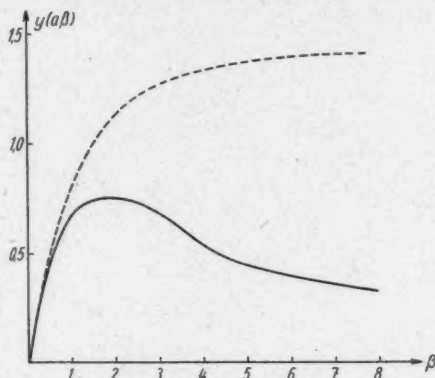


Abb. 1. Verlauf der Funktion $y(a, \beta)$ für $a = 4,2 \text{ \AA}$ und $\sqrt{\gamma} = 0,5 \text{ Mol/l.}$ ($T = 18^\circ \text{ C.}$) Die gestrichelte Kurve bezieht sich auf $a = 0 \text{ \AA}$

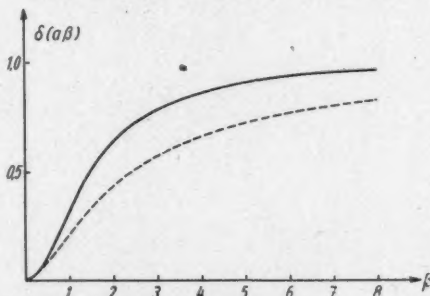


Abb. 2. Verlauf der Funktion $\delta(a, \beta)$ für $a = 4,2 \text{ \AA}$ und $\sqrt{\gamma} = 0,5 \text{ Mol/l.}$ ($T = 18^\circ \text{ C.}$) Die gestrichelte Kurve bezieht sich auf $a = 0 \text{ \AA}$

schiedene Ergebnisse. Bei der Verwendung von Gl. (24) würde die Besetzungszahl in erster Näherung keine wesentliche Rolle spielen, während Gl. (33) so

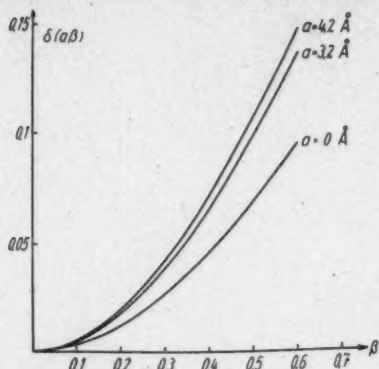


Abb. 3. Einfluß des Ionenradius a auf die Funktion $\delta(a, \beta)$. ($T = 18^\circ\text{C}$), $\sqrt{\gamma} = 0,5 \text{ Mol/l}$

modifiziert ist, daß die Besetzungszahl sich bereits in erster Näherung bemerkbar macht. Die letztere Gleichung wurde auch in unserer Leitfähigkeitsarbeit verwendet. (Siehe H. Falkenhagen, M. Leist und G. Kelbg, Ann. Physik (6) 11, 51 (1952).) Es wird demnächst überprüft, inwieweit die von Eigen und Wicke benutzte Formel (33) zu Recht besteht. Hier beim Wien-Effekt sowie bei der Leitfähigkeit spielt sie bis zu Konzentrationen von etwa 0,5 Mol/Liter keine wesentliche Rolle.

Rostock, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 29. August 1952.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenbergr. Weg 74; für den Anzeigentell: Willy Huhn (Arbeitsgemeinschaft medizinischer Verlage G.m.b.H.), Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 20 12 97. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 9. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63 105, 63 781. Veröffentlicht unter der Lizenznummer 285/1264 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik

Printed in Germany

Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 175/52

ungs-
3) so
gszahl
g be-
hung
keite-
ken-
lbg,
wird
die
utzte
Hier
Leit-
ntra-
keine